SERIE A N° 3977
N° D'ORDRE :
4828

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE : DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUE

PAR

Pierre MOREL

1e THESE. "Théorie d'un état superfluide de l'Hélium 3"

2e THESE. PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le 5 Novembre 1962 devant la Commission d'Examen

MM. ROCARD, Président
FRIEDEL) Examinateurs
NOZIERES)

SERIE A N° 3977
N° D'ORDRE :
4828

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE : DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUE

PAR

Pierre MOREL

1e THESE. "Théorie d'un état superfluide de l'Hélium 3"

2e THESE. PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le 5 Novembre 1962 devant la Commission d'Examen

MM. ROCARD, Président
FRIEDEL) Examinateurs
NOZIERES)

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

nvier 1962)

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- PROFESSEURS -

Doyen ..... M. ZAMANSKY

JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
: BROGLIE	T	Théories physiques
ENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
ASSÉ	T	Evolution des êtres organisés
EVOST	T	Chimie organique
AUDRON	T	Chimie appliquée
ART	T	Minéralogie & Cristal.
ISSIER	T	Zoologie
ANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay)
GER	T	Physique quantique et Relativité
ONNIER	T	Physiologie générale
VETEAU	T	Paléontologie
OCARD	T	Physique (E.N.S.)
RTAN	T	Mathématiques (ENS.)
FFITTE	T	Chimie générale
VARD	T	Géométrie supérieure
OULOMB	T	Physique du Globe
e COUSIN	T	Biologie Animale (SPCN)
HRETIEN	T	Chimie minérale
RACH	T	Zoologie
ASTLER	T	Physique (E.N.S.)
PHRUSSI	T	Génétique
IVIERE	T	Géologie SPCN et sédim.
AUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.)
JCAS R.	T	Recherches Physiques
HOMAS A.	T	Biologie cellulaire
RNULF	T	Optique appliquée
ORAND	T	Physique Enseignement
OLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
ORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides
ANJON	T	Astronomie
ETIT	T	Biologie maritime
UENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
ALLIEN	T	Embryologie
CHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (SPCN)
Mle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay)
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres
QUELET	T	Chimie Organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories Physiques
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J.P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie Végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul diff. et Intégral
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie Minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie

LRICH	T	Physiologie Végétale
ARECHAL	T	Optique théorique et Appl.
RRMANN	T	Théories Chimiques
IADEFAUD	T	Botanique
e LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
LEM	T	Mathématiques génér.
CLONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie
EVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comp.
HRESMANN	T	Topologie Algébrique
RANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
LANGEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique
ODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C)
SOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
OCH	T	Géologie
CHATZMAN	T	Astrophysique
ERMIER	T	Paléontologie stratig.
AMANSKY	T	Mathématiques génér.
ENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
ZET	T	Génétique (Orsay)
OUTHIER	T	Géologie appliquée
me TONNELAT	T	Physique théorique
XMIER	T	Mathématiques (MPC)
OUCHAY	T	Chimie générale
GRAIN	T	Electrotechnique génér.
RUSSET	T	Chimie systématique
. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
me CHAIX	T	Chimie biologique
me HUREL-PY		Biologie Végétale (PCB)
LAUX	T	Chimie (M.P.C.)
RUN	T	Mécan. théorique des Fluides
EDERER	T	Chimie biologique
me DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation)
me LELONG	T	Mathématiques (E.N.S)
ELLAIR	T	Géologie (SPCN.)
OTTE	T	Physique électricité
UBOIS J.E	T	Chimie organique
AMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
ICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay)
LMER	T	Energétique générale
OUAULT	T	Electricité (Orsay)
AUTHIER	T	Mécanique appliquée
ARCHEWITZ	T	Chimie Physique
ROSSEL	T	Physique atomique
USER	T	Physiologie comparée
CAMUS	T	Physiologie Vég. BMPV
CASTAING	T	Physique (Orsay)
CURIEN	T	Minéralo. et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie végé. (Orsay)
NOIROT	T	Evolution des Etres org.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radio-activité
TONNELAT	T	Biologie Physico-chim.
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T	Recherches Physiques
GUINOCHET	T	Biol. Vég. SPCN (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et Théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques Géné. Orsay
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Phys. Fondamentale des Hautes Energies (Orsay)
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Ors.)
M. JULIA		Etudes des Moléculaires naturelles complexes
LENDER	T	Biol. Animale (SPCN) Orsay
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments.
Mle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
GUERIN	T	Chimie MPC. (Orsay)
CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.)
JEAN	T	Physique Nucléaire (Orsay)
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
MICHEL L.		Phys. Théor. des Htes Energies (Orsay)
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay)

RTEIN	T	Electronique (Orsay)
UISSIERES		Chimie des Radioéléments (Orsay)
me COUTURE	T	Thermodynamique et Méca. Physique
LLENBERGER	T	Géologie appli. s/le terr.
RANC		Biol. Animale (PCB)
HNELL		Botanique tropicale (Orsay)
OLKOWSKI		Physiologie générale
CHER		Chimie Biol. (Orsay)
AUDOIN		Biologie animale PCB.
EAUMONT		Biologie animale SPCN
LAMONT	T	Géophysique Ionosphère
OURREAU		Botanique
URIE D.		Physique (M.G.P.)
URAND-DELGA		Géologie
REON	T	Chimie organique (Orsay)
ELLER	T	Physiologie végétale
ORTRAT	T	Calcul des Probabilités
AILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
AGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
AUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
le FOURCROY		Biol. Végétale (SPCN)
me CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méc. céleste
Mle VEIL		Physiologie Générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques MPC (Orsay)
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique
COMOLET	T	Mécanique des Fluides
CORABOEUF		Physiologie Animale
DELLOUE		Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)
HOUILLON		Biologie Animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie P.C.B.
MALGRANGE	T	Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE		Physique ENS. (Orsay)
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T	Mathématiques ENS féminines
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay)
THIRY	T	Mécanique céleste

SECRETAIRE GENERAL ... R. POULLAIN.

Ce travail a été effectué pendant les années 1958-1962 sous la direction du Professeur J. Friedel. Je le prie de trouver ici mes remerciements pour la confiance et le soutien qu'il m'a accordés.

Je voudrais exprimer ma trés vive gratitude au Dr. P. W. Anderson des Bell Telephone Laboratories qui m'a proposé ce sujet de thèse, dont les conseils m'ont constamment guidé au cours de son étude et dont les contributions originales m'ont donné les éléments essentiels de la solution proposée dans le présent travail.

Je présente aussi mes plus sincéres remerciements au Professeur P. Nozières pour l'aide efficace qu'il m'a donnée au cours de nombreuses et fructueuses discussions.

INTRODUCTION

Il existe au moins un exemple clairement établi de condensation d'un système de fermions : la transition des électrons de conduction de certains métaux, de l'état normal (fluide de Fermi) à l'état supraconducteur. Ce phénomène est connu expérimentalement depuis longtemps mais ce n'est qu'en 1956 que Cooper formula l'hypothèse fondamentale sur laquelle est fondée la théorie moderne de la supraconductivité [1]. En écrivant l'équation dynamique d'une excitation b_k^+ du système d'électrons, consistant en l'addition d'une paire de particules de quantité de mouvement totale et de spin total nuls :

$$b_k^+ = c_{k'}^+ \; c_{-k\downarrow}^+$$

Cooper démontre que l'état normal devient instable en dessous d'une certaine température T_c si l'interaction des particules est attractive. Cette instabilité par rapport à la formation de paires $k\uparrow$, $-k\downarrow$ indique qu'il faut rechercher un autre état de base. L'hypothèse de Cooper consiste à supposer que les fermions forment des paires liées qui se comportent approximativement comme de nouvelles particules obéissant à la statistique de Bose-Einstein : un nombre quelconque de ces paires peut donc s'accumuler dans un état unique qui joue le role de l'état de base d'un système dégénéré de bosons. En se fondant sur ces prémisses, Bardeen, Cooper et Schrieffer [2] déterminent l'état de base du système condensé par un calcul variationnel tenant compte de l'énergie de condensation des paires, et en déduisent une théorie cohérente et presque complète du phénomène de supraconductivité. Presque simultanément, Bogoliubov et al. [3] proposèrent une théorie équivalente fondée sur une transformation canonique diagonalisant approximativement l'Hamiltonien du système dans l'état condensé.

Notations : nous avons adopté la notation $\vec{k}$ pour représenter les vecteurs. Toutefois, pour des raisons de clarté typographique, on omettra la flêche lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguité, notamment lorsque k figure en indice. On dénote par O^+ l'opérateur adjoint et par c^* le complexe conjugué d'un nombre algébrique ordinaire.

Pour des raisons de simplicité, ces travaux sont restreints au cas d'un état condensé de symétrie sphérique c'est-à-dire constitué de paires dans l'état s. La première partie de l'étude présentée ici, consiste en une généralisation de la théorie de BCS au cas où les paires cohérentes ont un moment cinétique non nul. Pour deux particules isolées, il serait naturellement vain de rechercher un état de base autre que celui de moment cinétique nul, car le gain éventuel d'énergie potentielle dans un état $\ell \neq 0$ ne saurait compenser l'excès d'énergie cinétique par rapport à l'état s. Mais il n'en est pas ainsi pour un fluide de fermions puisque les vitesses des particules sont imposées par la statistique : une énergie potentielle plus basse est donc un gain net. On s'attend donc à une condensation par formation de paires dans un état de rotation de type ℓ si le potentiel d'interaction est tel que l'énergie de liaison de deux particules soit maximum dans l'état ℓ. Ce raisonnement physique est justifié par le traitement mathématique qui s'appuie sur l'orthogonalité des harmoniques sphériques entrainant un découplage presque total des configurations de ℓ différents. Le traitement présenté ici suit une méthode proposée par Anderson[4] consistant en un calcul variationnel identique à celui de BCS mais présentant en outre l'avantage de mettre en évidence les excitations élémentaires du système condensé sous une forme analogue à la théorie de Bogoliubov. Cette forme simplifie beaucoup l'étude des propriétés thermodynamiques.

Cette étude a été entreprise en vue de l'application au cas de l'Hélium 3 qui se comporte jusqu'aux plus basses températures atteintes, comme un liquide de Fermi typique. L'interaction entre deux atomes d'Hélium 3 nus (dans la limite des très basses pressions) se compose d'un coeur répulsif très fort et d'une attraction de faible intensité mais de portée relativement grande (Fig. 1). Il résulte des travaux de Brueckner et Gammel[5] et de Pitaevskii[6] que l'interaction entre les quasi-particules du fluide dense (liquide) est effectivement répulsive dans les états de petit moment cinétique relatif mais attractive dans les états de ℓ élevé. Les évaluations numériques de Brueckner et Gammel, et de Emery et Sessler[7] s'accordent pour estimer que cette attraction est la plus forte dans l'état $\ell = 2$. Sur cette base, on prédit une transition vers un état condensé constitué de paires dans l'état d, à une température critique de l'ordre de 0,05 à 0,1 °K [7][8]. Cependant, ce résultat théorique n'a pas été confirmé par l'expérience puisque les observations de Wheatley et al.[9] semblent démontrer que l'Hélium 3 liquide reste

un fluide de Fermi normal jusqu'à 0,008 °K au moins. Ces données expérimentales permettent d'autre part, d'évaluer la durée de vie moyenne des excitations élémentaires ou "quasi-particules" dans l'Hélium 3 en fonction de la température : on trouve que même à une température de l'ordre de quelques centièmes de degré absolu, cette vie est relativement courte et que l'incertitude correspondante des énergies d'excitation est de l'ordre de l'énergie de liaison des paires. Ceci suggère que l'effet des collisions est important dans le problème que nous considérons ici et, par conséquent, que les premiers calculs fondés sur l'approximation de Hartree (durée de vie infinie) pourraient être sérieusement erronés.

Malheureusement, la méthode variationnelle adoptée dans la première partie fait explicitement intervenir cette approximation et ne se prête donc pas à l'introduction d'une correction représentant l'effet des phénomènes de collision. Nous avons donc consacré une seconde partie de cette étude à l'élaboration d'un nouveau traitement inspiré de la théorie des champs et généralisant la méthode de Gor'kov[10]. Ce nouveau formalisme fait appel aux "fonctions de Green" qui représentent les différentes évolutions possibles d'une quasi-particule en présence de la phase condensée : propagation ou bien absorption cohérente. On sait que l'approximation des particules indépendantes (Hartree) n'est valide que pour un gaz (faible densité); dans le cas d'un fluide dense, on peut cependant établir une correspondance biunivoque entre les particules du système et les excitations élémentaires ou quasi-particules caractérisées par leur quantité de mouvement $\vec{k}$. Dans l'approximation de Hartree, chaque particule a une énergie bien déterminée qui correspond à un pole de la fonction de Green sur l'axe réel; dans un fluide dense, on ne peut pas associer à une quasi-particule une énergie unique mais seulement une certaine distribution spectrale correspondant à un pole complexe de la fonction de Green. La largeur de cette distribution spectrale caractérise la durée de vie de la quasi-particule. Une extension simple de la méthode de Gor'kov suivant un modèle dû à P. Nozières[11] permet ainsi de tenir compte quantitativement de l'effet des collisions. Nous concluons de cette théorie que nous avons étendu au cas d'une température finie, que la durée de vie finie des excitations élémentaires se traduit simplement par une coupure (dans l'espace réciproque) du domaine des quasi-particules qui participent efficacement au processus de condensation. Ce résultat est raisonnable d'un point de vue physique puisque les quasi-particules correspondant à une énergie d'excitation élevée

disparaissent trop rapidement pour avoir le temps de constituer des paires cohérentes; les quasi-particules de faible énergie, d'autre part, ont une durée de vie longue par rapport à l'échelle de temps du phénomène de condensation, de sorte que l'on peut sans inconvénient négliger leur relaxation (approximation de Hartree).

On a pris soin d'évaluer d'une façon aussi précise que possible la probabilité de collision dans l'Hélium 3 liquide, d'abord directement en utilisant la théorie des liquides de Fermi de Landau [12] puis indirectement, à partir des valeurs expérimentales de certaines propriétés physiques - telles que la conductivité thermique - intimement liées aux phénomènes de collision. Nous en déduisons finalement une température de transition théorique de l'ordre de $0,02\,^{o}K$. Cette valeur est encore plus grande que la limite supérieure imposée par l'expérience mais est cependant d'un ordre de grandeur raisonnable compte tenu de l'incertitude du paramètre $N_o V$ qui caractérise la force de liaison des paires.

Finalement, une troisième partie est consacrée à une rapide exploration des propriétés originales de l'état condensé, en particulier, la superfluidité. On montre également que le caractère anisotrope de l'état de base entraine une correlation non nulle entre la densité de particules et le courant.

***

L'ensemble des première et troisième parties du travail présenté ici, d'une part, et la seconde partie, d'autre part, font l'objet de deux publications détaillées [13] auxquelles nous nous référerons au cours du développement par les symboles (I) et (II).

I. PRESENTATION DU FORMALISME

L'idée directrice des théories de BCS et de Bogoliubov est d'assimiler la condensation d'un système de fermions à une condensation de Bose-Einstein en admettant que les paires cohérentes $\vec{k}\alpha$, $-\vec{k}\beta$ se comportent essentiellement comme des bosons. Ces paires forment la phase condensée qui joue ainsi le rôle de l'état de base d'un système dégénéré de bosons ; sa population est macroscopique c'est-à-dire de l'ordre du nombre total de particules N. Le traitement mathématique dérive de l'approximation de Bogoliubov (appliquée d'abord au cas d'un liquide de bosons) qui consiste à négliger la réponse dynamique de la phase condensée, les propriétés physiques du système étant essentiellement inchangées par l'addition d'une paire cohérente, à des corrections de l'ordre de 1/N près. Pour tenir compte de cette continuité, il commode d'utiliser une moyenne statistique sur un "grand ensemble" de Gibbs ce qui revient à décrire une portion (macroscopique) du fluide, de volume fixé mais contenant un nombre variable de particules fluctuant autour de la valeur moyenne N. Cette convention n'est d'ailleurs qu'une commodité de calcul et on pourrait également utiliser un formalisme équivalent où les états du système seraient exclusivement des états propres du nombre total de particules (opérateur N) : voir à ce sujet la fin du Chapitre II. En pratique, au lieu d'introduire explicitement le potentiel chimique, on mesurera simplement l'énergie des particules par rapport au niveau de Fermi.

Mis à part des corrections du second ordre, la présence de la phase condensée n'affecte pas la fonction de Green à une particule mais seulement la fonction de Green à deux particules et plus précisément les termes qui décrivent la propagation simultanée de deux quasi-particules (ou quasi-trous) satisfaisant la condition de cohérence :

$$K(1,2,3,4) = \left\langle \varphi_0(N) \middle| T\, c_{k\alpha}(t_1)\, c_{-k\beta}(t_2)\, c^{+}_{-k'\beta}(t_3)\, c^{+}_{k'\alpha}(t_4) \middle| \varphi_0(N) \right\rangle \qquad (1)$$

$$t_1, t_2 > t_3, t_4$$

Nous avons introduit ici la notation T pour le produit chronologique dont l'effet est de classer les opérateurs c et c^+ par ordre de temps croissant de droite à gauche (en affectant le produit du signe (+) ou (-) suivant la parité de la

permutation). Dans un système normal, ces termes n'ont rien departiculier et correspondent simplement au diagramme (2.a) dont la contribution est d'ordre Ω^{-1} (inversement proportionnelle au volume). On voit aisément en effet, qu'un noyau d'ordre p dans un tel diagramme comporte p noeuds d'interaction qui introduisent un facteur Ω^{-p} et (2p-2) lignes intérieures corespondant à (2p-2) variables $\vec{k}_i$ liées par (p-1) relations de conservation, soit finalement (p-1) variables indépendantes dont l'integration sur l'espace réciproque fournit un facteur Ω^{p-1}.

Dans le cas d'un système condensé, d'autre part, nous sommes conduits à développer les termes (1) sous la forme :

$$K(1,2,3,4) = \left\langle \varphi_0(N) \middle| T\, c_{k\alpha}(t_1)\, c_{-k\beta}(t_2) \middle| \varphi_0(N+2) \right\rangle \left\langle \varphi_0(N+2) \middle| T\, c_{-k'\alpha}(t_3)\, c_{k'\beta}(t_4) \middle| \varphi_0(N) \right\rangle \qquad (2)$$

où l'état intermédiaire $\varphi_0(N+2)$ ne diffère de l'état initial que par l'addition d'unepaire cohérente. Suivant l'approximation de Bogoliubov, nous convenons de négliger cette différence en ce qui concerne l'évolution dynamique du système : ceci revient à interpréter le développement (2) par le diagramme (2.b) constitué de deux parties non connectées . Il en résulte directement que la contribution des termes (1) dans le cas d'un système condensé, est d'ordre 1 , indépendante du volume (on s'en convaint aisément en notant qu'un noyau d'ordre p comprend maintenant (2p-1) lignes intérieures au lieu de (2p-2) dans le cas précédent). Il est donc naturel de penser que les termes (1), négligeables dans le cas d'un système normal, sont la source de l'énergie de condensation d'un système dans l'état condensé. Cette inférence a été justifiée en détail par Anderson[4] dans le cadre de l'approximation de Bogoliubov : la contribution à l'énergie totale des termes d'interaction autres que (1) est pratiquement la même dans l'état condensé et dans l'état normal, à 1/N près. Ces termes d'interaction (termes d'échange en particulier) n'interviennent donc que comme des constantes fixes sans importance pour le problème de la condensation.

En outre, l'état intermédiaire $\varphi_0(N+2)$ est unique : le développement (2) ne comporte aucune sommation sur les quantités de mouvement des particules ajoutées dans l'état intermédiaire et par suite, ces termes (2) ont une portée infinie entre les groupes (1,2) et (3,4) et participent de ce fait à l'approximation de Hartree au même titre que les termes de Hartree usuels :

$$\langle \varphi_0(N) | T\, c_{k\sigma}(t_1)\, c^+_{k\sigma}(t_4) | \varphi_0(N) \rangle \langle \varphi_0(N) | T\, c_{k'\sigma'}(t_2)\, c^+_{k'\sigma'}(t_3) | \varphi_0(N) \rangle$$

Ces derniers termes, composés de deux fonctions de Green à une particule, ne sont pas affectés par la condensation au premier ordre, et fournissent simplement une correction fixe de l'énergie des quasi-particules qu'il est commode d'incorporer à l'énergie cinétique sous la forme d'une correction de masse effective.

En conclusion, l'énergie de condensation provient des éléments de matrice (1) dont la contribution est négligeable dans le cas d'un système normal (de l'ordre de Ω^{-1}) mais d'ordre 1 dans le cas d'un système condensé. Ceci est une conséquence directe de l'approximation de Bogoliubov qui nous permet de considérer les deux parties du diagramme (2.b) comme indépendantes. Il suffit dans ces conditions, pour déterminer l'énergie de l'état de base, de considérer un Hamiltonien réduit qui ne comprend que les termes d'interaction qui donnent naissance à (1).

Nous introduisons maintenant quelques notations. Nous nous plaçons a priori dans le cas d'un système uniforme, invariant par translation spatiale ou temporelle et de plus, invariant par renversement des spins (ceci suppose que le potentiel d'interaction est indépendant des spins et que le spin total du système est nul). Nous définissons avec Gor'kov[10] les fonctions de temps et d'espace ($x \equiv \vec{r}, t$) :

$$\check{F}_{\sigma\sigma'}(x - x') = \langle \varphi_0(N) | T\, \psi_\sigma(x)\, \psi_{\sigma'}(x') | \varphi_0(N+2) \rangle$$
$$\hat{F}_{\sigma\sigma'}(x - x') = \langle \varphi_0(N+2) | T\, \psi^+_\sigma(x)\, \psi^+_{\sigma'}(x') | \varphi_0(N) \rangle \qquad (3)$$

Dans le cadre de l'approximation de Bogoliubov, il n'est pas utile de spécifier les états $\varphi_0(N)$ et $\varphi_0(N+2)$ qui apparaissent dans ces éléments de matrice : nous nous en abstiendrons donc désormais. La fonction $\hat{F}$ représente donc l'absorption cohérente de deux quasi-particules dans la phase condensée et $\check{F}$ le processus inverse. D'après la définition du produit chronologique, on voit que ces fonctions satisfont la relation :

$$\hat{\check{F}}_{\sigma\sigma'}(x - x') = - \hat{\check{F}}_{\sigma'\sigma}(x' - x) \qquad (4)$$

Cette propriété suggère, lorsque le potentiel d'interaction est instantanné (local dans le temps), une remarquable relation entre la symétrie spatiale des paires cohérentes et le couplage des spins. Dans le cas particulier $t = t'$, (4) indique en effet que la configuration spatiale des paires dans l'état singulet ($\sigma = -\sigma'$) est nécéssairement paire :

$$\overset{\vee}{\hat{F}}_{+-}(\vec{r},0) = -\overset{\vee}{\hat{F}}_{-+}(-\vec{r},0) = \overset{\vee}{\hat{F}}_{+-}(-\vec{r},0) \qquad (5)$$

D'un autre côté, l'état triplet entraine nécéssairement une configuration spatiale impaire :

$$\overset{\vee}{\hat{F}}_{++}(\vec{r},0) = -\overset{\vee}{\hat{F}}_{++}(-\vec{r},0) \qquad (6)$$

Nous concluons donc que la condensation d'un système de fermions par formation de paires dans un <u>état de rotation de type ℓ pair</u>, n'est possible qu'avec un <u>couplage antiparallèle</u> des spins tel que :

$$F_{++} = F_{--} = 0$$
$$F_{+-} = -F_{-+}$$

Au contraire les états de rotation de type ℓ impair ne sont compatibles qu'avec un couplage parallèle :

$$F_{++} = F_{--}$$
$$F_{+-} = F_{-+} = 0$$

On voit en outre, en utilisant les relations de commutation des opérateurs ψ et ψ^+ et la relation (4), que les fonctions $\hat{F}$ et $\check{F}$ sont liées par la relation :

$$\hat{F}_{\sigma\sigma'}(\vec{r},0) = \left[\check{F}_{\sigma'\sigma}(-\vec{r},0)\right]^* = -\left[\check{F}_{\sigma\sigma'}(\vec{r},0)\right]^* \qquad (7)$$

On convient de définir les transformés de Fourier de ces fonctions de façon à préserver cette relation de conjugaison :

$$\begin{aligned} \check{F}_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t) &= \left\langle T\, c_{k\sigma}(t)\, c_{-k\sigma'}(0)\right\rangle \\ \hat{F}_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t) &= \left\langle T\, c^+_{k\sigma}(t)\, c^+_{-k\sigma'}(0)\right\rangle \end{aligned} \qquad (8)$$

Dans ces conditions, $c^{+}_{k\sigma}(t)$ et $c_{k\sigma}(t)$ sont respectivement les opérateurs d'anihilation et de création d'une quasi-particule de quantité de mouvement $\vec{k}$ et de spin σ à l'instant t. Il est classique de poser :

$$\begin{aligned} b_k &= \check{F}_{\beta\alpha}(-\vec{k}, 0) = \left\langle c_{-k\beta}\, c_{k\alpha} \right\rangle \\ b^{*}_k &= \hat{F}_{\alpha\beta}(\vec{k}, 0) = \left\langle c^{+}_{k\alpha}\, c^{+}_{-k\beta} \right\rangle \end{aligned} \qquad (9)$$

où $\alpha\beta$ est la combinaison $+-$ dans le cas d'une configuration spatiale paire et indifféremment $++$ ou $--$ pour une configuration impaire.

REMARQUE

Une intéressante alternative a été proposée par Gor'kov et Galitskii[14] concernant la nature de l'état de base condensé et les fonctions de correlation qui en résultent. Ces auteurs suggèrent que lorsque l'interaction des quasi-particules est favorable à la formation de paires liées dans un état de rotation de type ℓ (ℓ différent de zéro), ces paires peuvent être dans l'un qualconque des $(2\ell + 1)$ états propres $m = -\ell, -\ell+1, \ldots +\ell$. On suppose en outre qu'il n'y a pas de transition d'un état de rotation m à un état m' de sorte que les paires liées constitueraient véritablement $(2\ell + 1)$ phases condensées distinctes. Un état du système est alors spécifié par les nombres d'occupation des $(2\ell + 1)$ phases condensées et deux états correspondant à des nombres d'occupation différents sont orthogonaux. Dans ces conditions, si φ_o est l'état de base, le développement (2) de la fonction de correlation à deux particules est remplacé par :

$$K(1,2,3,4) = \sum_m \left\langle \varphi_o \middle| T\, c_{k\alpha}(t_1)\, c_{-k\beta}(t_2) \middle| \varphi_m \right\rangle \left\langle \varphi_m \middle| T\, c^{+}_{-k'\beta}(t_3)\, c^{+}_{k'\alpha}(t_4) \middle| \varphi_o \right\rangle \qquad (2')$$

où φ_m résulte de l'addition d'une paire cohérente à la phase condensée ℓ, m de φ_o. Par raison de symétrie, les $(2\ell + 1)$ états de rotation d'une paire liée sont également probables, de sorte que les populations (macroscopiques)

des $(2\ell + 1)$ phases condensées sont sensiblement égales et que l'état de base φ_o est isotrope. On vérifie aisément qu'une telle solution est compatible avec l'équation (19) pourvu que le développement (2) soit remplacé par (2'). On trouve d'ailleurs que l'énergie de condensation qui correspondrait à cette solution est plus grande que celle que nous obtenons avec le développement (2), précisément dans la mesure où le "facteur de forme D" favorise la configuration isotrope par rapport à toute configuration anisotrope (voir Chapitre II, Tableau I). La solution de Gor'kov et Galitskii apparait donc, à première vue, non seulement plus "simple" (isotrope) mais encore plus favorable du point de vue énergétique. Cependant l'étude approfondie de le méthode de calcul adoptée par ces auteurs montre que la solution isotrope n'est qu'une solution parasite et ne correspond à aucun état réel du système.

La méthode de Gor'kov consiste en effet à substituer à l'équation de Schrödinger, un système infini (S) d'équations couplées faisant intervenir successivement les fonctions de Green (propagateurs) à une, deux,.... n particules. En fait, il est nécéssaire de limiter (S) à un certain ordre fini au dela duquel les correlations peuvent être négligées. Dans le cas qui nous intéresse - formation de paires cohérentes - on peut se limiter au second ordre en négligeant les correlations de trois particules ; cette procédure est d'ailleurs rigoureusement correcte dans la limite des basses énergies (au zéro absolu) puisqu'une particule au moins parmi les trois doit se propager librement. Cette approximation se traduit mathématiquement par le fait que l'on néglige la partie liée de la fonction de Green à trois particules. Il est certain, comme le montrent Gor'kov et Galitskii, que le système (S) limité au second ordre admet bien la solution isotrope correspondant au développement (2'). Mais si on porte cette solution dans le système (S) complèté jusqu'à l'ordre 4, on découvre que les correlations d'ordre 4 (partie liée du propagateur à 4 particules) ne sont pas négligeables, contrairement à l'hypothèse de départ (D. Hone, Phys. Rev. Letters, 8 , 370 (1962).). Plus précisément, D. Hone montre que le système (S) n'admet que des solutions telles que la partie liée $K(1,2,3,4)$ de la fonction de Green à deux particules soit factorisable. Il en est bien ainsi

pour le développement (2) mais naturellement pas pour (2'). Cette condition - possibilité de séparer K en deux facteurs - traduit bien sur le plan mathématique le fait physique de l'indépendance des deux processus d'absorption et de "désorption" d'une paire cohérente.

L'hypothèse fondamentale de Gor'kov et Galitskii soulève en effet, du point de vue physique, de sérieuses difficultés. On doit supposer, suivant ces auteurs, que l'absorption d'une paire cohérente dans un certain état de rotation ℓ, m est nécéssairement suivie de la désorption d'une paire dans le même état. Or ces deux processus peuvent avoir lieu à une distance quelconque d'espace-temps puisqu'il s'agit bien de deux couples de particules distincts $\vec{k}$, $-\vec{k}$ et $\vec{k}'$, $-\vec{k}'$. L'hypothèse de Gor'kov et Galitskii implique donc que la formation d'une paire cohérente m soit instantannément annoncée à l'ensemble du système. Le raisonnement de D. Hone montre que ceci n'a pas lieu et qu'il n'est pas légitime de considérer un système de fermions comprenant plusieurs phases condensées dégénérées et distinctes.

II. DETERMINATION DE L'ETAT DE BASE PAR LA METHODE VARIATIONNELLE

On se propose ici de déterminer l'état du système pour lequel la valeur moyenne de l'Hamiltonien réduit est minimum. Soit ε_k l'énergie de la quasi-particule de quantité de mouvement $\vec{k}$ et $V_{kk'}$ l'élément de matrice du potentiel d'interaction. L'expression de l'Hamiltonien complet est :

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k \, c^+_{k\sigma} \, c_{k\sigma} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k\,k'\,q \\ \sigma\sigma'}} V_{kk'} \, c^+_{k'\sigma} \, c^+_{q-k',\sigma'} c_{q-k,\sigma'} c_{k\sigma} \qquad (10)$$

On obtient l'Hamiltonien réduit en ne conservant de cette expression que les termes d'interaction qui conduisent à (2), c'est-à-dire :

$$H_{red} = \sum_{k} \varepsilon_k \, n_k - \sum_{k\,k'} V_{kk'} \, b^+_{k'} \, b_k \qquad (11)$$

On a effectué la sommation sur les spins en tenant compte de l'invariance du système par renversement des spins postulée au chapitre précédent. On a en outre introduit les opérateurs :

$$\begin{aligned} n_k &= c^+_{k\alpha} \, c_{k\alpha} \\ b^+_k &= c^+_{k\alpha} \, c^+_{-k\beta} \\ b_k &= c_{-k\beta} \, c_{k\alpha} \end{aligned} \qquad (12)$$

Nous ne considérons ici que les particules au voisinage du niveau de Fermi. On sait que dans l'état de base ces particules forment des paires cohérentes : on peut donc limiter la recherche de l'état de base au sous-ensemble des états du système dans les quels les états individuels $\vec{k}\alpha$ et $-\vec{k}\beta$ sont soit tous les deux occupés, soit tous les deux vides simultanément (sous-ensemble des paires). Soit :

$$|\Psi_{occ}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\Psi_{vide}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

les vecteurs propres qui représentent ces deux états d'occupation de la paire $\vec{k}\alpha$, $-\vec{k}\beta$. Il est clair que les opérateurs b^+_k et b_k sont alors représentés

par les matrices :

$$b_k^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tandis que n_k est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'analogie de ces matrices avec les matrices de spin apparaît encore plus clairement en définissant un opérateur vectoriel $\vec{\sigma}_k$ dont les trois composantes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{ku} &= b_k^+ + b_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_{kv} &= i(b_k^+ - b_k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_{kw} &= 1 - n_k - n_{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (13)$$

Cet opérateur $\vec{\sigma}_k$ est donc formellement identique à l'opérateur de spin dans l'espace de spin (matrices de Pauli). En utilisant cette définition et en négligeant un terme constant sans importance pour ce problème, nous pouvons réexprimer l'Hamiltonien réduit (11) sous la forme suivante :

$$H_{red} = - \sum_k \epsilon_k \sigma_{kw} - \frac{1}{4} \sum_{k k'} V_{kk'} \left[\sigma_{ku} \sigma_{k'u} + \sigma_{kv} \sigma_{k'v} \right] \qquad (14)$$

formellement identique à l'Hamiltonien d'un système ferromagnétique si ϵ_k joue le role du champ magnétique externe et $V_{kk'}$ celui de l'interaction spin-spin. Le niveau de Fermi est la limite au-dela de laquelle le "pseudo-champ" ϵ_k change de signe c'est-à-dire l'analogue du mur de Bloch. En d'autres termes, nous venons de montrer l'identité de notre problème qui concerne les états d'occupation vide ou plein des paires d'états individuels $(\vec{k}, -\vec{k})$, avec le problème du mur de Bloch qui concerne les états $\uparrow$ ou $\downarrow$ d'un système de spins ferromagnétique. Nous profitons de cette similitude pour appliquer une méthode mise au point pour traiter le ferromagnétisme : la méthode "semi-classique" [16] qui consiste à remplacer l'opérateur de spin :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

par un vecteur ordinaire de module 1/2 , dont les coordonnées cartésiennes sont les valeurs moyennes des opérateurs $1/2\ \sigma_{ku}$, $1/2\ \sigma_{kv}$ et $1/2\ \sigma_{kw}$. Du point de vue d'un pseudo-spin <u>déterminé</u> $\vec{S}_k$, l'Hamiltonien (14) se présente comme un produit scalaire $-\vec{E}_k \vec{S}_k$ où $\vec{E}_k$ est le pseudo-champ défini par :

$$E_{ku} = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \sigma_{k'u}$$

$$E_{kv} = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \sigma_{k'v} \qquad (15)$$

$$E_{kw} = \varepsilon_k$$

Noter le facteur 2 qui provient du fait qu'un $\vec{S}_k$ donné apparait deux fois dans la double sommation du terme d'interaction de l'Hamiltonien Par suite, l'énergie totale du système n'est pas $-\sum_k \vec{E}_k \cdot \vec{S}_k$ car cette expression revient à compter deux fois chaque terme d'interaction. La position d'équilibre du pseudo-spin $\vec{S}_k$ est parallèle au pseudo-champ $\vec{E}_k$, ce que l'on peut exprimer par la condition :

$$\frac{\sigma_{ku} + i \sigma_{kv}}{\sigma_{kw}} = \frac{E_{ku} + i E_{kv}}{E_{kw}}$$

Puisque $\vec{\sigma}_k$ est un vecteur unitaire, la solution de cette équation a la forme :

$$\sigma_{kw} = \cos \chi_k = \frac{\varepsilon_k}{E(\vec{k})}$$

$$\sigma_{ku} + i \sigma_{kv} = \sin \chi_k \, e^{i \psi_k} = \frac{C(\vec{k})}{E(\vec{k})} \qquad (16)$$

où nous avons introduit la fonction $C(\vec{k})$ ayant la dimension d'une énergie :

$$C(\vec{k}) = E_{ku} + i E_{kv} \qquad (17)$$

et l'énergie $E(\vec{k})$ associée à une excitation élémentaire $\vec{k}$ du système condensé (c'est-à-dire le module du pseudo-champ $\vec{E}_k$) :

$$E(\vec{k}) = \left[\varepsilon_k^2 + |C(\vec{k})|^2 \right]^{1/2} \qquad (18)$$

Rassemblant les définitions (15) et (17) avec la condition (16), nous obtenons finalement l'équation :

$$C(\vec{k}) = \sum_{k'} V_{kk'} \frac{C(\vec{k}')}{2 E(\vec{k}')} \qquad (19)$$

qui généralise l'équation intégrale de BCS et de Bogoliubov. Dans le cas isotrope considéré par ces auteurs, $C(\vec{k})$ est une constante correspondant à une bande interdite. Dans ce cas simple, il est aisé de séparer les variables $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ en

prenant la moyenne angulaire de $V_{kk'}$. Il n'en est plus de même dans le cas général que nous considérons içi : il va falloir transformer explicitement l'équation (19) afin de la rendre séparable.

Séparation des variables. Définition du potentiel effectif.

Dans la limite du couplage faible, certainement valide dans le cas de l'Hélium 3, seules les transitions au voisinage du niveau de Fermi contribuent effectivement au phénomène de condensation. Pour mettre ceci en évidence, évaluons l'énergie de condensation W_o du système; on voit avec l'aide de (15) et (16) que la valeur moyenne de l'Hamiltonien (14) dans l'état de base est :

$$\left\langle H_{red} \right\rangle_o = -\sum_k \frac{\varepsilon_k^2 + \frac{1}{2}\left|C(\vec{k})\right|^2}{E(\vec{k})}$$

tandis que dans l'état normal (distribution de Fermi) :

$$\left\langle H_{red} \right\rangle_{Fermi} = -\sum_k \left|\varepsilon_k\right|$$

La différence est donc :

$$W_o = \sum_k \left|\varepsilon_k\right| - \frac{\varepsilon_k^2 + \frac{1}{2}\left|C(\vec{k})\right|^2}{E(\vec{k})} \qquad (20)$$

Dans la limite du couplage faible, $E(\vec{k})$ est pratiquement égal à l'énergie d'excitation ε_k des quasi-particules, sauf au voisinage du niveau de Fermi. Pour fixer les idées, soit (D) une couche sphérique dans l'espace réciproque contenant toutes les quasi-particules $\vec{k}$ d'énergie inférieure à une coupure arbitraire ξ très inférieure à l'énergie de Fermi ε_F et cependant très supérieure à $\mathrm{Sup}\left|C(\vec{k})\right|$. Remplaçant $E(\vec{k})$ par son développement en série de puissances de $C(\vec{k})/\varepsilon$, on voit que la contribution des $\vec{k}$ extérieurs au domaine (D) s'élimine au quatrième ordre près dans l'expression (20). L'énergie de condensation provient donc presqu'exclusivement de la sommation à l'intérieur de (D), soit $\sum^{int}$. Il est naturel, dans ces conditions, de transformer (19) de façon à séparer la sommation dans le domaine (D). En posant $\varepsilon = \varepsilon_k$ et en profitant de la linéarité approximative de l'équation (19) par rapport à $C(\vec{k})$ à l'extérieur de (D) $(E(\vec{k}) \approx \varepsilon_k)$, on obtient :

$$C(\vec{k}) \approx \sum_{k'}^{int} V_{kk'} \frac{C(\vec{k}')}{2E(\vec{k}')} + \sum_{k'}^{ext} V_{kk'} \frac{C(\vec{k}')}{2|\varepsilon'|}$$

D'où par itération :

$$C(\vec{k}) = \sum_{k'}^{int} V_{kk'} \frac{C(\vec{k}')}{2E(\vec{k}')} + \sum_{k'}^{ext} \sum_{k''}^{int} V_{kk'} \frac{1}{2|\varepsilon'|} V_{k'k''} \frac{C(\vec{k}'')}{2E(\vec{k}'')}$$

$$+ \sum_{k'}^{ext} \sum_{k''}^{ext} \sum_{k'''}^{int} V_{kk'} \frac{1}{2|\varepsilon'|} V_{k'k''} \frac{1}{2|\varepsilon''|} V_{k''k'''} \frac{C(\vec{k}''')}{2E(\vec{k}''')} + \cdots$$

Soit encore, en permutant les indices muets :

$$C(\vec{k}) = \sum_{k'}^{int} U_{kk'} \frac{C(\vec{k}')}{2E(\vec{k}')} \qquad (21)$$

où nous avons introduit un potentiel effectif U défini par la relation :

$$U_{kk'} = V_{kk'} + \sum_{k''}^{ext} V_{kk''} \frac{1}{2|\varepsilon''|} V_{k''k'} + \sum_{k''}^{ext} \sum_{k'''}^{ext} V_{kk''} \frac{1}{2|\varepsilon''|} V_{k''k'''} \frac{1}{2|\varepsilon'''|} V_{k'''k'} \cdots$$

$$= V_{kk'} + \sum_{k''}^{ext} V_{kk''} \frac{1}{2|\varepsilon''|} U_{k''k'} \qquad (22)$$

Nous savons que le niveau de Fermi ne se manifeste par aucune discontinuité des éléments de matrice $V_{kk'}$ de sorte que $U_{kk'}$ est certainement régulier dans le domaine (D). On peut donc négliger l'influence sur $U_{kk'}$ de la variation (relativement très petite) des modules des vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ dans le domaine (D). $U_{kk'}$ ne dépend donc pratiquement que de l'angle de ces vecteurs et par suite, la fonction $C(\vec{k})$ ne dépend effectivement que de l'orientation du vecteur $\vec{k}$. Nous en tiendrons compte en écrivant désormais $C(\hat{k})$ où $\hat{k}$ est le vecteur unitaire parallèle à $\vec{k}$. Développant $U_{kk'}$ en série d'harmoniques sphériques (*) :

(*) Si θ et φ sont les coordonnées sphériques du vecteur unitaire $\hat{k}$ et si θ', φ' sont les coordonnées sphériques de $\hat{k}'$, dans un système d'axes fixé arbitrairement, on a suivant le théorème d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_\ell(\hat{k} \cdot \hat{k}') = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} Y_\ell^m(\theta,\varphi)\, Y^{m*}(\theta',\varphi')$$

On utilisera la notation abrégée $\hat{k}$ pour désigner l'ensemble des coordonnées θ et φ.

$$U_{kk'} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, U_\ell(k,k')\, P_\ell(\hat{k}\cdot\hat{k}')$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} 4\pi\, U_\ell(k,k')\, Y_\ell^m(\hat{k})\, Y_\ell^{m*}(k') \ ,$$

nous achevons de séparer les variables $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ dans l'équation (21) :

$$C(\hat{k}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} 2\pi\, U_\ell\, Y_\ell^m(\hat{k}) \sum_{k'}^{int} Y_\ell^{m*}(\hat{k}')\, \frac{C(\hat{k}')}{E(\vec{k}')} \qquad (23)$$

Cette procédure qui nous a permis de passer de (19) à (23) appelle plusieurs remarques. En premier lieu, elle permet d'éliminer les divergences formelles introduites par le coeur répulsif du potentiel d'interaction des atomes d'Hélium 3. Notre procédure est en effet toutafait analogue à la méthode de Bethe-Goldstone : l'équation (22) qui définit le potentiel effectif peut être exprimée dans l'espace de position et intégrée comme l'équation de Bethe-Goldstone. Nous allons d'ailleurs démontrer explicitement l'élimination des termes divergents en considérant seulement un terme du développement de (22) en série de polynomes de Legendre :

$$U_\ell(k,k') = V_\ell(k,k') + \int_{\xi}^{\infty} V_\ell(k,k'')\, \frac{1}{\varepsilon''}\, U_\ell(k'',k')\, N_o\, d\varepsilon'' \qquad (24)$$

On a remplacé içi la sommation sur les $\vec{k}$ par une intégration dans l'espace réciproque (en supposant que le système est très étendu). L'intégration dans (24) porte seulement sur le module de $\vec{k}''$ ou mieux, sur l'énergie d'excitation correspondante $\varepsilon'' = \hbar v_o (k'' - k_o)$. N_o est la densité d'états individuels d'un spin donné au voisinage du niveau de Fermi (c'est-à-dire la moitié de la densité habituelle). Supposons maintenant que le coeur répulsif puisse être approximé par un potentiel carré (dans l'espace de position) de force A variable ; il est bien évident que dans ces conditions, $V_\ell(k,k')$ est proportionnel au paramètre A. Lorsque A augmente indéfiniment (cas d'un coeur répulsif infiniment "dur"), l'équation (24) ne peut clairement être satisfaite que si $U_\ell(k,k')$ est indépendant de A donc fini. En d'autres termes, les termes proportionnels à A, formellement infinis, se compensent mutuellement au second membre de (24).

On remarque d'autre part, que le potentiel effectif $U_{kk'}$ n'est pas défini intrinsèquement mais seulement en fonction de la coupure ξ du domaine (D) que nous nous sommes donnée arbitrairement. Il faut donc démontrer que les expressions des grandeurs physiques (telles que l'énergie) que nous allons calculer, sont effectivement indépendante du paramétre ξ . Nous notons que l'équation fondamentale (23) ne fait intervenir, en fait, que la valeur particulière $U_\ell = U_\ell(k_o,k_o)$ de la fonction $U_\ell(k, k')$ au voisinage du niveau de Fermi. Il est donc suffisant de considérer seulement la famille des solutions particulières $U_\ell(k , k_o)$ de l'équation (24) pour les différentes valeurs du paramètre ξ , soit :

$$U_\ell(k , k_o) = V_\ell(k , k_o) + \int_\xi^\infty V_\ell(k , k'') \frac{1}{\varepsilon''} U_\ell(k'', k_o) N_o \, d\varepsilon'' \qquad (25)$$

Dérivons par rapport à ξ :

$$\frac{\partial}{\partial\xi} U_\ell(k , k_o) = - \frac{N_o}{\xi} V_\ell(k , k_o) U_\ell(k_o,k_o) + \int_\xi^\infty V_\ell(k , k'') \frac{1}{\varepsilon''} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} U_\ell(k'', k_o)\right] N_o \, d\varepsilon'' \qquad (26)$$

Et additionnons membre à membre cette équation (26) à l'équation (25) multipliée par $\frac{N_o}{\xi} U_\ell(k_o,k_o)$. Il vient :

$$F(k) = \int_\xi^\infty V_\ell(k , k'') \frac{1}{\varepsilon''} F(k'') N_o \, d\varepsilon'' \qquad (27)$$

avec : $$F(k) = \frac{\partial}{\partial\xi} U_\ell(k , k_o) + \frac{N_o}{\xi} U_\ell(k , k_o) U_\ell(k_o,k_o)$$

A cause de la divergence logarithmique du noyau lorsque le paramètre ξ tend vers zéro, l'équation intégrale (27) n'admet que la solution triviale $F(k) = 0$.
Nous en déduisons la relation :

$$\frac{dU_\ell}{U_\ell^2} + N_o \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

ou encore :

$$\frac{1}{N_o U_\ell} = \text{Log}\xi + \text{constante} \qquad (28)$$

Resolution de l'Equation Intégrale

Il reste maintenant à résoudre explicitement l'équation (23) et rechercher, parmi les différentes solutions $C(\hat{k})$, celle qui correspond à l'énergie de condensation la plus grande. On voit d'après (20) que W_o s'exprime simplement en fonction de la valeur moyenne de $|C(\hat{k})|^2$ sur la sphère. En effet :

$$W_o = -\frac{N_o}{8\pi} \int |C(\theta,\varphi)|^2 \, d\Omega = -\frac{N_o \Delta^2}{8\pi} \qquad (29)$$

L'équation (23) est évidemment non linéaire puisque $|C(\vec{k})|^2$ intervient dans l'expression de $E(\vec{k})$. Toutefois, on peut penser que les termes du second membre correspondant à des ℓ différents sont très peu couplés et que (23) admet des solutions approximatives du genre :

$$C(\hat{k}) = \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} \Delta_m \, Y_\ell^m(\hat{k}). \qquad (30)$$

Cette hypothèse est justifiée en détail dans (I) : il existe en effet des solutions exactes très voisines de (30) mais incluant en outre des corrections proportionnelles aux différents harmoniques sphériques $Y_{\ell'}^{m'}$ $(\ell' \neq \ell)$ qui apparaissent dans l'équation complète (23). Toutefois, ces corrections ne contribuent pas à l'expression (29) de l'énergie de condensation, au premier ordre, à cause de l'orthogonalité des différents harmoniques sphériques. Un calcul numérique effectué dans (I) montre que l'approximation qui consiste à remplacer (23) par l'équation simplifiée :

$$C(\hat{k}) = 2\pi U_\ell \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} Y_\ell^m(\hat{k}) \sum_{k'}^{int} Y_\ell^{m*}(\hat{k}') \frac{C(\hat{k}')}{\left[\varepsilon_{k'}^2 + |C(\hat{k}')|^2\right]^{1/2}} , \qquad (31)$$

n'introduit pas une erreur supérieure à 1/1000 de l'énergie de condensation dans la cas de l'Hélium 3 ($\ell = 2$). On pourrait même être tenté de poursuivre dans cette voie et de répéter le raisonnement pour les différents m . De fait, l'équation (31) admet bien des solutions particulières (simples) :

$$C(\hat{k}) = \Delta_m \, Y_\ell^m(\hat{k}) \qquad (32)$$

où la constante Δ_m est déterminée par une équation toutafait analogue à celle de BCS :

$$1 = 2\pi U_\ell \sum_{k'}^{int} \frac{|Y_\ell^m(\hat{k}')|^2}{\left[\varepsilon_{k'}^2 + |C(\hat{k}')|^2\right]^{1/2}} \qquad (33)$$

Toutefois, ces solutions particulières (32) sont loin d'épuiser l'ensemble des solutions de l'équation non linéaire (31). S'il est vrai, en effet, qu'une solution du type général (30) conserve sa forme lorsqu'on effectue une rotation du système d'axes de coordonnées, il n'en est pas de même pour une solution particulière (32) qui se transforme effectivement en une combinaison linéaire du genre (30). Il est clair par conséquent, que l'équation (31) admet certainement des solutions complexes. D'un autre côté, on voit aisément, sous la forme (21), que l'équation intégrale que nous nous proposons de résoudre, est invariante par les rotations de l'espace réciproque ainsi que par les transformations de jauge (multiplier $C(\hat{k})$ par un facteur de phase fixé). Les solutions de (31) se répartissent donc en un certain nombre (fini) de classes d'équivalence, correspondant chacune à une valeur de l'énergie de condensation. On a effectué cette analyse dans l'Appendice A pour le cas $\ell = 2$ et on a trouvé, en plus des trois solutions simples indépendantes, deux solutions complexes :

$$C_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} (Y_2^1 + Y_2^{-1})$$

$$C_5 = \Delta\left[\frac{1}{\sqrt{2}} Y_2^0 + \frac{1}{2}(Y_2^2 - Y_2^{-2})\right] \qquad (34)$$

Pour déterminer la constante Δ, il est pratique de définir pour chaque solution C_i une fonction normalisée sur la sphère :

$$f(\hat{k}) = \frac{C(\hat{k})}{\Delta} = \sum_m a_m Y_\ell^m(k)$$

Portant cette expression dans (31) et intégrant sur l'énergie, on obtient :

$$f(\hat{k}) = N_o U_\ell \sum_m Y_\ell^m(\hat{k}) \int Y_\ell^{m*}(\hat{k}') f(\hat{k}') \operatorname{Log}\left(\frac{2\xi}{\Delta|f(\hat{k}')|}\right) d\Omega'$$

ou encore, à cause de l'orthogonalité des harmoniques sphériques :

$$a_m = N_o U_\ell \int Y_\ell^{m*}(\hat{k}') f(\hat{k}') \operatorname{Log}\left(\frac{2\xi}{\Delta|f(k')|}\right) d\Omega'$$

Multipliant cette dernière équation par a_m^* et sommant sur tous les m, on obtient:

$$1 = \sum_m a_m a_m^* = N_o U_\ell \int |f(\hat{k}')|^2 \operatorname{Log}\left(\frac{2\xi}{\Delta|f(k')|}\right) d\Omega'$$

Introduisant un "facteur de forme" D caractéristique de la classe de solutions considérée, nous pouvons écrire cette dernière relation sous la forme familière :

$$\Delta = 2\pi D \exp\left(-\frac{1}{N_o U_\ell}\right) \qquad (35)$$

$$\text{Log } D = -\int |f(\theta,\varphi)|^2 \text{ Log} |f(\theta,\varphi)| \, d\Omega$$

Notons au passage que Δ est bien indépendant du paramètre ε compte tenu de la relation (28). Nous avons calculé (Tableau I ci-dessous) les valeurs de Log D pour les solutions independantes de type s, p et d. Dans le cas $\ell = 2$, la solution la plus favorable est C_5, qui a la propriété de posséder un assez haut degré de symétrie puisque $|C_5(\hat{k})|$ a la symétrie cubique. On trouve d'ailleurs que $|C_5|$ varie relativement peu sur la sphère et pourrait être remplacé par une constante (de l'ordre de sa valeur maximum $C_o = (5/8\pi)^{1/2}$) avec une précision raisonnable. Toutefois, l'existence de noeuds $C_5 = 0$ affecte considérablement le spectre des énergies d'excitation (18).

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 0$	1,265	1,048	1,02
$m = 1$		1,201	1,131
$m = 2$			1,131
$C_1(\ell = 2)$			0,98
$C_5(\ell = 2)$			1,154

Tableau I

Valeurs du facteur de forme Log D pour différentes classes de solutions.

Fonction d'onde de l'état de base

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire explicitement le vecteur d'onde qui représente l'état de base du système condensé, dans l'approximation de Bogoliubov. Définissant les amplitudes de probabilité u_k et v_k que la paire d'états $\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\downarrow$ soit respectivement vide et occupée, on a donc :

$$|\varphi_o\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k\, b_k^+ \right) |0\rangle \qquad (36)$$

où $|0\rangle$ est l'état vide; u_k et v_k sont des nombres complexes satisfaisant la condition : $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$,et en outre tels que :

$$1 - 2n_k = 1 - 2|v_k|^2 = \frac{\epsilon_k}{E(\vec{k})}$$

$$b_k = u_k^* v_k = \frac{C(\hat{k})}{2E(\vec{k})}$$

on voit de suite, en comparant ces conditions à la définition (16) que les valeurs convenables de u_k et v_k sont simplement :

$$u_k = \cos\left(\frac{\chi_k}{2}\right) e^{i\frac{\psi_k}{2}} \quad ; \quad v_k = \sin\left(\frac{\chi_k}{2}\right) e^{-i\frac{\psi_k}{2}}$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, le vecteur $|\varphi_o\rangle$ n'est pas un vecteur propre du nombre total de particules N, comme il convient à un mélange statistique fondé sur une distribution grand canonique. On peut toutefois projeter (36) sur le sous-espace où le nombre de paires est $(N/2)$ en utilisant un artifice du à Anderson :

$$|\varphi_o(N)\rangle = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\; e^{-i\frac{N}{2}\varphi} \prod_k \left(u_k + v_k\, b_k^+\, e^{i\varphi} \right) |0\rangle$$

A est une constante de normalisation. On montre aisément que les vecteurs d'onde $|\varphi_o(N+2)\rangle$ et $|\varphi_o(N)\rangle$ sont effectivement orthogonaux et que :

$$\langle \varphi_o(N)|\, b_k\, |\varphi_o(N+2)\rangle = u_k^* v_k \langle \varphi_o(N) | \varphi_o(N)\rangle = u_k^* v_k$$

ce qui achève de démontrer l'équivalence des méthodes de Bogoliubov et de Gor'kov dans le cas d'un système condensé avec une phase condensée unique.

III. THERMODYNAMIQUE DU FLUIDE CONDENSE

Nous nous proposons maintenant de déterminer l'état du système pour lequel l'énergie libre est minimum à une température finie T. Toutefois, au lieu de calculer explicitement l'énergie libre à la manière de BCS, nous allons plutôt étudier les états excités possibles du couple d'états individuels $\vec{k}\alpha$, $-\vec{k}\beta$. Nous notons premièrement que l'opérateur $\vec{\sigma}_k$ étant analogue formellement à l'opérateur de spin $\frac{1}{2}$, doit avoir deux états propres orthogonaux respectivement parallèle et antiparallèle au pseudo-champ $\vec{E}_k$. Ces deux états d'occupation appartiennent au sous-espace des états d'occupation par paire et sont exactement la "paire de base" et la "paire excitée" de BCS. Par ailleurs, l'un ou l'autre des états $\vec{k}\alpha$ ou $-\vec{k}\beta$ peut être occupé individuellement par une particule. On se convaint aisément d'après la définition (13) que la valeur moyenne de $\vec{\sigma}_k$ a un module 1 dans le cas d'une occupation par paire et 0 dans le cas d'une occupation individuelle. L'énergie de ces quatre états est finalement donnée par l'Hamiltonien réduit (14) et égale au produit scalaire $-\vec{E}_k \cdot \vec{\sigma}_k$. En résumé :

Etat d'occupation		Composante de $\vec{\sigma}_k$ suivant $\vec{E}_k$	Energie
Etat de base		+ 1	- E(k)
Etats excités	$\vec{k}\alpha$ occupé seul	0	0
	$-\vec{k}\beta$ occupé seul	0	0
	paire excitée	- 1	+ E(k)

Tableau II

Température critique

Cette analyse nous permet d'abord de reprendre la condition d'équilibre (16) pour tenir compte de la réduction des composantes "transverses" E_{ku} et E_{kv} du pseudo-champ dues au fait que les $\vec{\sigma}_k$ sont remplacés par des moyennes

thermodynamiques :

$$\langle \sigma_k \rangle = \frac{e^{\beta E(k)} - e^{-\beta E(k)}}{e^{\beta E(k)} + e^{-\beta E(k)} + 2} = \text{th}\left[\frac{\beta E(k)}{2}\right]$$

où β est $1/KT$. En conséquence, l'équation (19) est remplacée par :

$$C(\hat{k}) = \sum_{k'} V_{kk'} \frac{C(\hat{k}')}{2E(k')} \text{th}\left[\frac{\beta E(k')}{2}\right] \qquad (37)$$

Dans la limite des basses températures, le facteur tangente hyperbolique est pratiquement égal à 1 à l'extérieur du domaine (D) de sorte que la réduction de cette équation et la séparation des variables $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ se déroule comme pour l'équation (19). Malgré tout, l'équation intégrale qui en résulte est très compliquée, sauf à la température critique T_c où l'état de Fermi est juste instable. Dans ce cas particulier important ($C(\hat{k}) \to 0$), l'équation (37) devient linéaire et l'intégration sur les variables angulaires est triviale. On obtient :

$$1 = N_o U_\ell \int_0^\xi \text{th}\left(\frac{\beta_c \epsilon}{2}\right) \frac{d\epsilon}{\epsilon}$$

Il est aisé d'inverser cette équation implicite en T_c :

$$KT_c = 1{,}14\, \xi \exp\left(-\frac{1}{N_o U_\ell}\right) \qquad (38)$$

Ce résultat est naturellement identique à celui de BCS et en général, indépendant de la nature de la solution $C(\hat{k})$ puisque l'équation (37) est linéaire pour $T = T_c$. En s'appuyant sur cette propriété et en développant cette équation en série de puissances de $C(\hat{k})$ au voisinage de la température critique, Emery[17] obtient explicitement les mêmes solutions que nous avons déterminées dans l'Appendice A en résolvant l'équation (31) au zéro absolu. Ce résultat indique que la nature de la solution (configuration spatiale) est indépendante de la température et que seule la grandeur du coefficient Δ est une fonction de la température dans l'intervalle $0 - T_c$.

En utilisant le potentiel calculé par Brueckner et Gammel et l'équation (38), Brueckner et al.[8] ont les premiers évalué une température de transition de l'ordre de $0{,}15\,^{\circ}K$. Ultérieurement, Emery et Sessler[7] ont obtenu une valeur

légèrement inférieure et plus probable de l'ordre de $0,07\,^{o}K$. L'écart entre ces valeurs et la limite supérieure $0,008\,^{o}K$ indiquée par l'expérience suggère que le traitement que nous venons d'exposer (fondé sur l'approximation de Hartree) tendrait à surestimer sérieusement la température critique. La raison physique de cette erreur est naturellement que nous avons fait intervenir dans (21) des quasi-particules dont la durée de vie est trop courte pour former des paires cohérentes. Nous étudierons en détail cet effet dans les deux chapitres suivants.

Densité d'états individuels excités et chaleur spécifique

Nous remarquons dans le Tableau II que les excitations individuelles du système, quasi-particules ou paires excitées, font intervenir une énergie $E(k)$ par particule au lieu de ε_k dans l'état normal. Ce nouveau spectre d'excitation constitue une différence essentielle du point de vue thermodynamique et est à l'origine des propriétés macroscopiques particulières du fluide condensé : superfluidité, chaleur spécifique et susceptibilité paramagnétique nulles au zéro absolu. Pour rendre plus claire la nature de cette différence, nous allons d'abord comparer la densité d'états excités $N(E)$ au voisinage du niveau de Fermi pour un système normal et un système condensé. Dans le premier cas, $N(\varepsilon)$ est sensiblement constante et égale à N_o. Dans le second cas, d'autre part, le terme supplémentaire $|C(\hat{k})|$ perturbe considérablement $N(E)$ aux faibles énergies de l'ordre de Δ. Le Jacobien associé au changement de variable $(k, \theta, \varphi) \to (E, \theta, \varphi)$ est en effet :

$$\frac{D(k,\theta,\varphi)}{D(E,\theta,\varphi)} = \frac{m\,E}{\hbar^2 k_o \left[E^2 - |C(\theta,\varphi)|^2\right]^{1/2}}$$

et par conséquent :

$$N(E) = N_o E \int\!\!\int_{\Sigma} \frac{1}{\left[E^2 - |C(\theta,\varphi)|^2\right]^{1/2}} \frac{d\Omega}{4\pi} \qquad (39)$$

Dans cette dernière expression, l'intégration est étendue seulement sur le domaine Σ de la sphère où $|C(\hat{k})|$ est inférieur à E. Il est évident que $N(E)$ se réduit approximativement à N_o lorsque E est très supérieur à $\mathrm{Sup}|C(\hat{k})|$. Un calcul précis est toutefois nécéssaire pour évaluer $N(E)$ aux basses énergies. Ce calcul est très simple dans le cas isotrope ($|C(\hat{k})| =$ constante ε_o); on obtient :

$$N(E) = 0, \qquad E < \varepsilon_o$$

$$N(E) = N_o \left[\frac{E^2}{E^2 - \varepsilon_o^2}\right]^{1/2}, \qquad E > \varepsilon_o$$

Dans le cas $\ell = 0$, la couche d'épaisseur $2\varepsilon_o$ au voisinage du niveau de Fermi est une bande interdite. Dans les cas $\ell \neq 0$, il n'en est plus de même puisque la fonction $C(\hat{k})$ s'annule dans certaine directions : il n'y a pas de bande interdite mais seulement une dépression de la densité d'état au voisinage du niveau de Fermi (Fig. 3). Dans le cas de l'Hélium 3, on peut calculer $N(E)$ dans la limite des basses énergies d'une façon approchée (*) :

$$N(E)_{E\to 0} \approx 2 N_o \left(\frac{E}{\varepsilon_o}\right)^2 \qquad (40)$$

Ce resultat entraine une chaleur spécifique proportionnelle à T^3 dans la limite des basses températures. On voit en effet, d'après le Tableau II, que la fonction de partition Z_k du sous-système $k\alpha$, $-k\beta$ est :

$$Z_k = e^{\beta E(k)} + e^{-\beta E(k)} + 2$$

(*) Il est intéressant d'indiquer brièvement la méthode de calcul qui conduit à ce résultat. A cause de la symétrie cubique de $|C(\hat{k})|$, l'intégrale (39) est constituée de 8 contributions identiques provenant de régions semblables entourant les 8 noeuds de $C(\hat{k})$. On opère une rotation des axes de coordonnée de façon à ce que le nouvel axe Oz_1 passe par deux de ces noeuds. Dans ces conditions l'expression (A.15) de $|C(\hat{k})|^2$:

$$|C(\hat{k})|^2 = \frac{5\Delta^2}{8\pi}\left[(3\cos^2\theta - 1)^2 + 3\sin^2 2\varphi \sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_o^2\left[(3z^2 - 1)^2 + 12 x^2 y^2\right]$$

se transforme en :

$$|C(\hat{k})|^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_o^2\left[8 z_1^2(x_1^2 + y_1^2) + 4\sqrt{2}\, x_1 y_1 (3y_1^2 - x_1^2) + (x_1^2 + y_1^2)^2\right]$$

Au voisinage du noeud $z_1 = 1$, $x_1 = y_1 = 0$, on a donc au troisiéme ordre près :

$$|C(k)|^2 \simeq 2\varepsilon_o^2 (x_1^2 + y_1^2) = 2\varepsilon_o^2 \sin^2\theta_1$$

On pose $u = E/\sqrt{2}\varepsilon_o$. L'expression (39) prend alors la forme :

$$N(E) = 4 N_o u \int_0^{\text{Arcsin } u} \frac{\sin\theta\, d\theta}{|u^2 - \sin^2\theta|^{1/2}}$$

d'où effectivement :

$$N(E) = 2 N_o u \,\text{Log}\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = 4 N_o u^2$$

On en déduit aisément la valeur de l'entropie du sous-système et par suite, l'entropie totale :

$$S = K \sum_k \left[\text{Log } Z_k + T \frac{\partial}{\partial T} \text{Log } Z_k \right]$$

$$= 2K \sum_k \left[\text{Log}\left(1 + e^{-\beta E(k)} \right) + \frac{\beta E(k)}{1 + e^{\beta E(k)}} \right]$$

où nous avons utilisé la symétrie de $E(\vec{k})$ par rapport au niveau de Fermi. La chaleur spécifique du système est donc :

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = 2K\beta^2 \sum_k \frac{e^{\beta E(k)}}{\left[1 + e^{\beta E(k)}\right]^2} \left[E^2(k) + \beta E(k) \frac{dE(k)}{d\beta} \right]$$

Dans la limite des basses températures, $C(\hat{k})$ devient sensiblement constant, de sorte que $dE(k)/dT$ et a fortiori, $T\left[dE/dT\right]$ tendent rapidement vers zéro. On utilisera donc une expression simplifiée :

$$C_{T\to 0} = 2K\beta^2 \sum_k \frac{E^2(k)\, e^{\beta E(k)}}{\left[1 + e^{\beta E(k)}\right]^2}$$

En effectuant d'abord l'intégration angulaire, on obtient :

$$C_{T\to 0} = 4K\beta^2 \int_0^\infty \frac{E^2\, e^{\beta E}}{\left[1 + e^{\beta E}\right]^2} N(E)\, dE \qquad (41)$$

Comme le facteur $e^{\beta E} / \left[1 + e^{\beta E}\right]^2$ présente un pic aigu pour $E = 0$, il est permis d'utiliser l'expression approchée (40) de $N(E)$ et d'étendre l'intégration sur l'énergie jusqu'à l'infini. Finalement :

$$C_{T\to 0} = \frac{28\,\pi^4}{15} N_o\, \varepsilon_o^{-2} K^4 T^3 = 4{,}6\ \gamma T_c \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \qquad (42)$$

Ce dernier résultat a été obtenu en tenant compte exclusivement des excitations individuelles du système et en négligeant la contribution des états excités collectifs. Cette omission est rigoureusement justifiée dans le cas d'un système d'électrons supraconducteur parce qu'il n'existe alors aucun mode collectif de basse énergie. Cependant, Anderson a montré[4] que ceci est une propriété particulière du potentiel coulombien. Dans le cas d'un système de particules neutres douées d'une interaction à courte portée, Anderson a montré, dans

l'hypothèse d'une condensation de type s, qu'il existe des modes collectifs de basse énergie correspondant à des oscillations longitudinales du fluide de grande longueur d'onde et de fréquence ω :

$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{k_o q}{M} \qquad (43)$$

Dans le cas de l'Hélium 3, le spectre des excitations collectives est certainement plus compliqué et doit inclure en outre, des oscillations transverses correspondant à une rotation progressive dans l'espace réciproque, des axes par rapport auxquels est définie la fonction $C(\hat{k})$. Ces modes transverses sont analogues aux ondes de spin dans un système ferromagnétique et il est naturel de leur attribuer un spectre semblable : fréquence proportionnelle au carré du vecteur d'onde. Pour évaluer le facteur de proportionalité, nous admettrons que l'énergie de condensation disparait entièrement si une rotation des axes de 2π se produit dans un intervalle de l'ordre du rayon de cohérence r_c (que nous définissons plus loin au Chapitre VI). Dans ces conditions :

$$\omega \approx \Delta\, r_c^2\, q^2 \qquad (44)$$

Il est aisé de calculer la contribution à la chaleur spécifique provenant de ces deux types de modes collectifs. Pour les modes longitudinaux :

$$C_{long} \approx 0{,}04\ \gamma T_c\ (T/T_c)^3$$

soit environ 1% de la contribution principale (42). Pour les modes transverses:

$$C_{trans} \approx 0{,}1\ r_c^{-3}\ (KT/\Delta)^{3/2}$$

C_{trans} décroit moins vite que (42) lorsque la température tend vers zéro mais reste néanmoins pratiquement négligeable si le rayon de cohérence est grand, ce qui est le cas dans la limite du couplage faible.

Susceptibilité paramagnétique.

Puisque la condensation dans un état pair est le résultat de la formation de paires cohérentes dans l'état singulet (spins antiparallèles), la liberté des spins individuels, et par suite, la susceptibilité magnétique sont réduites

par rapport à leur valeur dans l'état normal. Au zéro absolu, les spins n'ont aucune liberté puisqu'ils doivent tous être couplés par paires antiparallèles et par conséquent, la susceptibilité doit s'annuler. Dans le cas du couplage parallèle, au contraire, les deux populations de spin + et - sont essentiellement découplées comme dans l'état normal : la susceptibilité de spin d'un système de fermions condensé dans un état de ℓ impair doit donc être sensiblement la même que dans l'état normal.

Revenons au cas du couplage antiparallèle (Helium 3). En présence d'un champ magnétique H, les excitations du sous-système $\vec{k}\uparrow$, $-\vec{k}\downarrow$ sont toujours celles du Tableau II, avec cette différence que la dégénérescence des deux états ($\vec{k}\uparrow$ occupé, $-\vec{k}\downarrow$ vide) et ($\vec{k}\uparrow$ vide, $-\vec{k}\downarrow$ occupé) est maintenant levée par l'interaction paramagnétique : leur énergie est maintenant $+\mu H$ et $-\mu H$ respectivement (μ est le magnéton nucléaire dans le cas de l'Hélium 3). A ceci près, rien n'est changé et la moyenne thermodynamique du moment magnétique total est donc :

$$\langle M \rangle = \mu \sum_k \frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta E(k)} + e^{-\beta E(k)} + e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}$$

Le magnéton nucléaire étant excessivement petit, on se trouve pratiquement toujours dans la limite du champ faible (le champ magnétique peut être considéré comme "faible" jusqu'à 10^5 Oersted) , de sorte que l'on peut utiliser une expression simplifiée :

$$\langle M \rangle = \chi H = 2\beta\mu^2 H \sum_k \frac{e^{\beta E(k)}}{\left[1 + e^{\beta E(k)}\right]^2} \qquad (45)$$

où χ est la susceptibilité paramagnétique. Utilisant l'expression approchée de la densité d'état, on obtient dans la limite des basses températures :

$$\chi_{T\to 0} = \frac{2\pi^2}{3} \mu^2 N_o \epsilon_o^{-2} K^2 T^2 = 1{,}08 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \chi_n$$

On a représenté dans la figure 4 la variation du rapport χ/χ_n de la susceptibilité du fluide condensé à celle du fluide normal (indépendante de la température).

IV. DETERMINATION DE L'ETAT DE BASE PAR LA METHODE DES PROPAGATEURS

Nous nous proposons içi de rétablir l'équation (21) par une nouvelle méthode non explicitement liée à l'approximation de Hartree, dans le but d'introduire une correction représentant l'effet des collisions. Cette méthode inspirée de la Théorie des Champs, fait intervenir les "propagateurs" ou fonctions de Green qui décrivent l'évolution d'une quasi-particule en présence du système dans son état de base (condensé).

Analyse diagrammatique

Une quasi-particule $\vec{k}\alpha$ peut se propager (compte tenu des collisions élastiques multiples) et finalement disparaître par une collision inélastique. Ce processus est décrit par la fonction de Green ordinaire ou propagateur G défini comme suit:

$$G_{\alpha\alpha}(x - x') = \left\langle \varphi_o \middle| T\, \psi_\alpha(x)\ \psi_\alpha^+(x') \middle| \varphi_o \right\rangle \qquad (46)$$

Dans le cas d'un fluide condensé, d'autre part, une quasi-particule $\vec{k}\alpha$ peut également s'associer à la quasi-particule $-\vec{k}\beta$ pour former une paire cohérente qui se fond dans la phase condensée. Ce processus d'absorption cohérente est décrit par la fonction de Green $\hat{F}_{\alpha\beta}(x - x')$ définie précédemment (3). On dénote par G_o la fonction de Green non perturbé qui décrit la propagation sans collision (correspond à la situation dans un système de particules indépendantes). Le propagateur vrai ou renormalisé G tient compte non seulement de ce processus de propagation sans collision mais encore des processus d'ordre supérieur qui font intervenir plusieurs interactions et éventuellement des opérateurs $\hat{F}$ et $\check{F}$ en nombres égaux quelconques. On a représenté symboliquement l'ensemble de ces processus dans la diagramme (5 a). $\sum_1$ est l'opérateur de masse qui rassemble les contributions de tous les noyaux irréductibles diagonaux qui ne changent pas le nombre total de particules (*). $\hat{\Sigma}_2$ d'autre part, est la contribution de l'ensemble des noyaux irréductibles qui comprennent un opérateur $\hat{F}$ de plus que d'opérateurs $\check{F}$ et dont l'effet net est par suite l'absorption cohérente d'une paire. Cet effet est d'ailleurs, immédiatement compensé par l'opérateur $\check{F}$ qui suit. L'équation

---

(*) On trouvera la définition des termes soulignés dans la référence 18.

symbolique (5.a) se traduit algébriquement par :

$$G(\vec{k},\omega) = G_o(\vec{k},\omega) + G(\vec{k},\omega)\Sigma_1(\vec{k},\omega)\,G_o(\vec{k},\omega) - \check{F}(\vec{k},\omega)\hat{\Sigma}_2(\vec{k},\omega)\,G_o(\vec{k},\omega) \qquad (47)$$

Dans le but de simplifier l'écriture, on a omis ici les indices de spin. Ceci ne présente naturellement aucune difficulté pour G et Σ_1 qui sont indépendants du spin. On convient par ailleurs d'associer la même combinaison de spins $\alpha\beta$ aux fonctions $\hat{F}$, $\check{F}$, $\hat{\Sigma}_2$ et $\check{\Sigma}_2$ de façon à préserver la relation de conjugaison sous sa forme (7). En revanche, cette convention introduit un signe (-) devant le dernier terme de (47), car le diagramme correspondant (5.a) fait intervenir la contraction $\check{F}_{\beta\alpha}(-\vec{k}, t)$ plutôt que $\check{F}_{\alpha\beta}(\vec{k},t)$. En outre, on a adopté une définition particulière de la transformation de Fourier par rapport à la variable temps, de façon à ne faire intervenir que des quantités réelles.(*)

On peut effectuer une analyse similaire dans le cas de $\check{F}$ (diagramme 5.b). La seule différence est l'absence d'un terme d'ordre zéro qui correspond au fait que l'absorption cohérente d'unepaire exige au moins une interaction. En définissant $\check{\Sigma}_2$ comme la somme des contributions des noyaux irréductibles qui créent une paire (issue de la phase condensée), on obtient d'une façon analogue :

$$\check{F}(\vec{k},\omega) = G(\vec{k},\omega)\check{\Sigma}_2(\vec{k},\omega)\,G_o(\vec{k},-\omega) + \check{F}(\vec{k},\omega)\Sigma_1(\vec{k},-\omega)\,G_o(\vec{k},-\omega) \qquad (48)$$

En combinant ces relations "géométriques" (47) et (48), on trouve de suite :

$$\check{F}(\vec{k},\omega) = \frac{\check{\Sigma}_2(\vec{k},\omega)}{\Omega(\vec{k},\omega)} \qquad (49)$$

$$\Omega(\vec{k},\omega) = \left[G_o^{-1}(\vec{k},\omega) - \Sigma_1(\vec{k},\omega)\right]\left[G_o^{-1}(\vec{k},-\omega) - \Sigma_1(\vec{k},-\omega)\right] + \hat{\Sigma}_2(\vec{k},\omega)\check{\Sigma}_2(\vec{k},\omega) \qquad (50)$$

Soulignons que nous n'avons fait jusqu'à présent aucune approximation : ces expressions sont simplement la conséquence de relations géométriques entre les différentes classes de diagrammes que nous avons définies plus haut.

(*) On définit la transformée de Fourier $G(\vec{k},\omega)$ d'une fonction $G(\vec{k},t)$ par la relation suivante :

$$G(\vec{k},t) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{k},\omega)\; e^{-i\omega t}\; d\omega$$

Simplification du problème dans la limite du couplage faible

Nous allons maintenant imposer quelques restrictions raisonnables à l'ensemble des diagrammes que nous inclurons explicitement dans le calcul final. Nous avons vu plus haut que chaque fonction $\check{F}$ ou $\hat{F}$ introduit un facteur proportionnel à Δ et par conséquent très petit dans la limite du couplage faible. Nous conviendrons donc de négliger tous les termes du second ordre en Δ ou d'ordre supérieur [11]. Comme les noyaux irréductibles qui interviennent dans Σ_1 comportent nécéssairement un nombre pair d'opérateurs F, cette approximation revient à négliger tous les diagrammes Σ_1 autres que ceux qui figurent dans l'opérateur de masse du fluide normal. Dans ces conditions, l'expression $\left[G_o^{-1}(\vec{k},\omega) - \Sigma_1(\vec{k},\omega)\right]$ n'est autre que l'inverse du propagateur $G_n(\vec{k},\omega)$ calculé dans l'état normal (fluide de Fermi).

D'autre part, nous négligeons également tous les diagrammes $\check{\Sigma}_2$ ou $\hat{\Sigma}_2$ faisant intervenir plus d'un opérateur $\check{F}$ ou $\hat{F}$ respectivement. Si nous nous limitons en outre au premier ordre de l'interaction, $\check{\Sigma}_2$ et $\hat{\Sigma}_2$ sont les contribution d'un seul diagramme représenté "explicitement" par la figure 6, d'où :

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}_2(x) &= V(x)\ \check{F}(x) \\ \hat{\Sigma}_2(x) &= V(x)\ \hat{F}(x) \end{aligned} \qquad (51)$$

Une meilleure approximation consisterait à inclure dans $V(x)$ l'ensemble des corrections de polarisation du fluide normal, à tous les ordres. Cependant, l'interaction ainsi renormalisée n'est plus locale dans le temps : ceci complique beaucoup le calcul. Nous négligerons donc les corrections de polarisation non instantannées et nous remplacerons le potentiel $V(x)$ par un potentiel instantanné $V(\vec{r})\ \delta(t)$. Ceci revient à remplacer le transformé de Fourier exact $V(\vec{k},\omega)$ par la valeur limite $V(\vec{k},0)$ ce qui est toutafait raisonnable puisque la dispersion ne se manifeste certainement qu'à des fréquences grandes par rapport à Δ. Dans ces conditions, les fonctions Σ_2 sont également locales dans le temps, de sorte que l'on peut définir une fonction d'espace $C(\vec{k})$ telle que :

$$\check{\Sigma}_2(\vec{k},\omega) = C(\vec{k}) \qquad (52.a)$$

Compte tenu du facteur i introduit par la transformation de Fourier (voir note page précédente), la relation de conjugaison (7) entraine alors :

$$\hat{\Sigma}_2(\vec{k},\omega) = \left[C(\vec{k})\right]^* \qquad (52.b)$$

Finalement, ces approximations nous conduisent à écrire $\Omega(\vec{k},\omega)$ sous la forme simplifiée suivante :

$$\Omega(\vec{k},\omega) = G_n^{-1}(\vec{k},\omega)\ G_n^{-1}(\vec{k},-\omega) + |C(\vec{k})|^2 \qquad (53)$$

Il ne reste maintenant qu'à substituer dans cette expression un modèle de propagateur G_n correspondant au degré d'approximation souhaité.

Approximation de Hartree.

Il est commode de se donner la fonction de Green G_n par sa représentation spectrale ou développement de Lehmann :

$$G_n(\vec{k},\omega) = \int_0^{\infty} \left[\frac{A_+(\vec{k},\omega')}{\omega' - \omega - i\eta} - \frac{A_-(\vec{k},\omega')}{\omega' + \omega - i\eta} \right] d\omega' \qquad \eta \to +0 \qquad (54)$$

où A_+ et A_- sont les densités spectrales pour les fréquences positives et négatives respectivement. L'approximation de Hartree consiste à associer à chaque quasi-particule une énergie ε_k bien déterminée, ce qui revient à adopter les densités spectrales suivantes (distributions de Dirac) :

$$A_+(\vec{k},\omega) = \delta(\omega - \varepsilon_k) \qquad \text{si } \varepsilon_k > 0$$
$$A_-(\vec{k},\omega) = \delta(\omega - \varepsilon_k) \qquad \text{si } \varepsilon_k < 0$$

et zéro autrement. Nous en déduisons immédiatement avec l'aide de (54):

$$G_n(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon_k - \omega \mp i\eta} \qquad \begin{cases} - & \text{si } \varepsilon_k > 0 \\ + & \text{si } \varepsilon_k < 0 \end{cases} \qquad (56)$$

Rassemblant les expressions (49),(53) et (56) et en utilisant la transformée de Fourier de l'expression (51), on obtient finalement :

$$C(k) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^3k'\ V(\vec{k}-\vec{k}')\ C(\vec{k}') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{1}{\left[E(k') - i\eta\right]^2 - \omega'^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k'\ V(\vec{k}-\vec{k}')\ \frac{C(\vec{k}')}{2\,E(\vec{k}')} \qquad (57)$$

On retrouve naturellement l'équation (19) obtenue par le calcul de variation du Chapitre II. Avant d'aller plus loin, il est commode de faire une approximation supplémentaire, à savoir négliger la variation de la transformée de Fourier $V(\vec{k}-\vec{k}')$ du potentiel en fonction des modules k et k' ; il n'est pas nécéssaire en effet de reproduire la séparation rigoureuse des variables $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ que nous avons effectuée au chapitre II puisque notre but içi est simplement de mettre en évidence l'effet de la durée de vie finie des quasi-particules. Nous supposerons donc que $V(\vec{k}-\vec{k}')$ ne dépend que de l'angle des vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k}'$. Cette approximation présente toutefois l'inconvénient de rendre le second membre de (57) divergent lorsque $\vec{k}'$ tend vers l'infini. Pour tourner cette difficulté, nous admettrons la décroissance de V peut être représentée par une coupure dans l'espace réciproque à une énergie de l'ordre de l'énergie de Fermi ε_F . Dans ces conditions, nous obtenons finalement la relation :

$$\Delta = 2\,\varepsilon_F\, D\, \exp\left(-\frac{1}{N_o V_\ell}\right) \qquad (58)$$

qui remplace (35).

Approximation de BMN[11]

En fait, le modèle (55) est assez inexact car l'état $c_k^+|\varphi_o\rangle$ ($c_k|\varphi_o\rangle$) n'est pas un état propre et sa norme est distribuée entre toutes les fréquences ω. Toutefois, si $\vec{k}$ n'est pas trop éloigné du niveau de Fermi, la densité de norme $A_+(\vec{k},\omega)$ ($A_-(\vec{k},\omega)$) présente un maximum accusé, de largeur $2\Gamma_k$ et centré autour de ε_k , en plus d'un fond continu A^{inc} . Les composantes du vecteur d'onde correspondant au pic, oscillent à une fréquence de l'ordre de ε_k et gardent des phases sensiblement cohérentes pendant un temps de l'ordre de $1/\Gamma_k$. La partie cohérente représente donc une quasi-particule de durée de vie $1/\Gamma_k$. D'un autre côté, les composantes correspondant au fond continu ont des phases incohérentes et se détruisent en moyenne. En résumé, les densités spectrales réelles sont :

$$A_\pm(k,\omega) = A_\pm^{inc} + \frac{z_k}{\pi}\,\frac{\Gamma_k}{(\omega \mp \varepsilon_k)^2 + \Gamma_k^2}$$

La partie cohérente (pic) apparait dans A_+ si $\varepsilon_k > 0$ et dans A_- dans le cas

contraire z_k est la surface recouverte par la partie cohérente ($z<1$) . Notre but ici étant de généraliser (55) aussi simplement que possible pour tenir compte de la durée de vie finie des excitations, nous pouvons négliger la partie incohérente de la densité spectrale exacte en ne conservant que le pic (qui recouvre maintenant une surface $z_k = 1$) :

$$A_{\pm}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_k}{(\omega \mp \varepsilon_k)^2 + \Gamma_k^2} \tag{59}$$

On en déduit immédiatement, avec l'aide de (54) :

$$G_n(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon_k - \omega \mp i\Gamma_k} \quad \begin{cases} - & \text{si } \omega > 0 \\ + & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \tag{60}$$

Et finalement :

$$C(\hat{k}) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k' \; V(\vec{k}-\vec{k}') \; C(\hat{k}') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\left[E(\vec{k}') - \omega' - i\Gamma_{k'}\right]\left[E(\vec{k}') + \omega' + i\Gamma_{k'}\right]}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \; V(\vec{k}-\vec{k}') \; \frac{C(\hat{k}')}{2E(\vec{k}')} \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{E(\vec{k}')}{\Gamma_{k'}}\right)\right] \tag{61}$$

On notera la grande similitude de cette équation avec l'équation correspondante (57) dans le cas de l'approximation de Hartree. La seule différence est le facteur entre crochets qui coupe l'intégrale lorsque la durée de vie $1/\Gamma_k$ devient trop courte. Nous verrons dans l'Appendice B, que Γ est proportionnel au carré de l'énergie d'excitation ϵ (à $T = 0$) soit :

$$\Gamma = \frac{\varepsilon^2}{\Lambda}$$

de sorte que le facteur de coupure prend la forme :

$$g(\epsilon) \simeq \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \tag{62}$$

Nous avons introduit ici le paramètre Λ qui mesure l'ampleur de l'effet des collisions (Λ ne dépend que du potentiel d'interaction des atomes d'Hélium 3). Nous évaluons ce paramètre dans l'Appendice B et nous trouvons une valeur de l'ordre de $1,5\,^{\circ}K$. Cette valeur étant certainement très supérieure à Δ, on peut effectivement remplacer $E(\vec{k})$ par ε_k sans affecter le facteur Arctangente.

Pour préciser l'effet de cette coupure, nous avons évalué numériquement l'intégrale :

$$\int_0^\infty g(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\left[\varepsilon^2 + C(\hat{k})^2\right]^{1/2}} = \mathrm{Log}\left(\frac{2\Lambda}{|C(\hat{k})|}\right) + \frac{2|C(\hat{k})|}{\pi\Lambda} - 0{,}206\,\frac{|C(\hat{k})|^2}{\Lambda^2} + O(\Delta^3)$$

$$= \mathrm{Log}\left(\frac{2\Lambda}{|C(\hat{k})|} + \frac{4}{\pi}\right) + O(\Delta^3)$$

Dans la limite du couplage faible, on peut négliger le terme $4/\pi$ dans l'argument du logarithme, de sorte que :

$$\int_0^\infty g(\varepsilon)\ \frac{d\varepsilon}{E} \simeq \mathrm{Log}\left(\frac{2\Lambda}{\Delta|f(\hat{k})|}\right)$$

On aurait obtenu le même résultat en remplaçant simplement la fonction $g(\varepsilon)$ par une fonction en escalier coupant l'intégration à $\varepsilon = \Lambda$. En d'autres termes, l'équation (61) conduit à la relation :

$$\Delta = 2\,\Lambda\,D\,\exp\left(-\frac{1}{N_o V_\ell}\right) \qquad (63)$$

L'effet de la durée de vie finie des excitations élémentaires est donc de réduire $C(\hat{k})$ par un facteur Λ/ε_F de l'ordre de $1/2$, par rapport à la valeur calculée dans l'approximation de Hartree. Mais en aucun cas la durée de vie finie ne peut empêcher la transition vers l'état condensé puisque celui-ci est certainement plus stable au zéro absolu.

V. EXTENSION DE LA METHODE DES PROPAGATEURS AU CAS D'UNE TEMPERATURE FINIE

La méthode que nous venons d'exposer fait intervenir d'une façon fondamentale, le fait que le système est dans son état de base : on ne peut donc pas l'étendre au cas d'une température finie (où il existe une probabilité finie pour que le système soit dans un état excité) sans de très grandes précautions. Nous voulons essentiellement remplacer la définition (46) par une moyenne statistique à la température T ($\beta = 1/KT$) :

$$G^{\beta}(x - x') = \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\ T\ \psi(x)\ \psi^{+}(x')\right]}{\mathrm{Tr}\left[\ e^{-\beta H}\right]} \qquad (64)$$

où l'opérateur Trace a la signification habituelle en thermodynamique quantique : somme des valeurs moyennes de l'opérateur entre crochet sur l'ensemble complet des états du système. En utilisant la relation :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{iHt}\ \psi(\vec{r})\ e^{-iHt}$$

et la propriété d'invariance cyclique de la trace, on peut écrire G sous la forme :

$$G^{\beta}_{>}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{iH(t - t' + i\beta)}\ \psi(\vec{r})\ e^{-iH(t - t')}\ \psi^{+}(\vec{r}')\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]}, \quad \text{si } t > t'$$

$$G^{\beta}_{<}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{iH(t' - t + i\beta)}\ \psi^{+}(\vec{r}')\ e^{-iH(t' - t)}\ \psi(\vec{r})\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]}, \quad \text{si } t < t'$$

$G_{>}$ est une fonction analytique de la variable $(t - t')$ dans la bande :

$$0 \geq \mathrm{Im}(t - t') \geq -\beta$$

tandis que $G_{<}$ est analytique dans la bande symétrique (Fig. 7)[19]. Le point essentiel est la possibilité de calculer $G_{>}$ pour les valeurs réelles positives de la variable $(t - t')$ par prolongement analytique de son expression sur le segment $0, -i\beta$ et de la même façon, $G_{<}$ pour $(t - t')$ réel négatif par prolongement de l'expression sur le segment $0, i\beta$. Notre but ici n'étant pas de calculer explicitement ces fonctions $G_{>}$ et $G_{<}$, nous n'effecturons pas ce prolongement.

Nous nous contenterons d'établir la relation entre les "propagateurs" G et $\hat{F}$, $\check{F}$ dont nous déduirons l'expression de la fonction d'espace $C(\hat{k})$, naturellement indépendante des transformations que nous pouvons effectuer dans le plan des temps complexes. Pour des raisons de commodité, nous calculerons G et $\hat{F}$, $\check{F}$ sur le segment des temps imaginaires $-i\beta$, $i\beta$.

Propagateurs sur l'axe des temps imaginaires

Nous définissons donc suivant la méthode de Luttinger et Ward[20] les opérateurs $c_k^+(u)$ et $c_k(u)$ dépendant de la variable de température $u = it$:

$$\begin{aligned} c_k^+(u) &= e^{uH}\ c_k^+\ e^{-uH} \\ c_k(u) &= e^{uH}\ c_k\ e^{-uH} \end{aligned} \tag{65}$$

et, par analogie avec (8) et (46), les propagateurs :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha}(\vec{k}, u-u') &= \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\ T\ c_{k\alpha}(u)\ c_{k\alpha}^+(u')\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]} \\ \hat{F}_{\alpha\beta}(\vec{k}, u-u') &= \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\ T\ c_{k\alpha}^+(u)\ c_{-k\beta}^+(u')\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]} \\ \check{F}_{\alpha\beta}(\vec{k}, u-u') &= \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\ T\ c_{k\alpha}(u)\ c_{-k\beta}(u')\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]} \end{aligned} \tag{66}$$

où T est un opérateur "chronologique" dont l'effet est de classer les opérateurs c et c^+ par ordre de u croissant c'est-à-dire, par exemple :

$$\begin{aligned} T\ c_k(u)\ c_k^+(u') &= c_k(u)\ c_k^+(u') \quad , \qquad \text{si } u > u' \\ T\ c_k(u)\ c_k^+(u') &= -c_k^+(u')\ c_k(u) \quad , \qquad \text{si } u < u' \end{aligned}$$

En utilisant les définitions (65) et la propriété d'invariance cyclique de la trace, on montre aisément que les fonctions (66) sont anti-périodiques sur l'intervalle $-i\beta$, $i\beta$ c'est-à-dire satisfont la relation :

$$S(u-u'-\beta) = -S(u-u') \tag{67}$$

Il en résulte que la combinaison $S(u)\, e^{i\pi u/\beta}$ est périodique et peut être développée en série de Fourier suivant :

$$S(u) = \frac{1}{\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=+\infty} S(\zeta_\ell)\, e^{\zeta_\ell u}$$

$$\zeta_\ell = \frac{2\pi i}{\beta}\ell + \frac{\pi i}{\beta} \qquad (68)$$

La variable discrète ζ joue le role de l'énergie ω en ce qui concerne les règles de composition des diagrammes et les coefficients de Fourier $G(k,\zeta)$, $\hat{F}(k,\zeta)$ et $\check{F}(k,\zeta)$ jouent respectivement les roles des propagateurs G, $\hat{F}$ et $\check{F}$ dans la représentation k,ω au zéro absolu. Luttinger et Ward démontrent que toutes les relations "géométriques" que l'on peut écrire entre les propagateurs ordinaires au zéro absolu, sont satisfaites également par les "propagateurs" (66) et leurs coéfficients de Fourier, à condition de remplacer les variables t et ω par u et ζ respectivement. En particulier, les relations (49) (50) (51) ainsi que les approximations qui conduisent à l'expression (53) ont leur analogues exactes dans le présent formalisme soit :

$$\check{F}(\vec{k},\zeta) = \frac{\check{\Sigma}_2(\vec{k})}{G_n^{-1}(\vec{k},\zeta)\; G_n^{-1}(\vec{k},-\zeta) + |\check{\Sigma}_2(\vec{k})|^2} \qquad (69)$$

$$\check{\Sigma}_2(\vec{r},u) = V(\vec{r})\; \delta(u)\; F(\vec{r},0) \qquad (70)$$

La méthode d'approximation semi-phénoménologique implicite dans le modèle de BMN nous engage à prendre pour densité spectrale du propagateur normal G_n :

$$A(\vec{k},x) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_k^\beta}{(x-\varepsilon_k)^2 + (\Gamma_k^\beta)^2} \qquad (71)$$

où $(\Gamma_k^\beta)^{-1}$ est la durée de vie de la quasi-particule $\vec{k}$ à la température T. Nous verrons dans l'Appendice B que Γ_k^β ne diffère sensiblement de la limite Γ_k^∞ au zéro absolu que dans la limite des basses énergies (de l'ordre de KT) :

$$\Gamma^\beta = \frac{1}{\Lambda} \frac{\varepsilon^2 + (\pi/\beta)^2}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} \qquad (72)$$

On obtient aisément l'expression du propagateur G_n à partir de (71) :

$$G_n(k,\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(k,x)}{\zeta - x}\, dx = \frac{1}{\varepsilon_k - \zeta \mp i\Gamma_k^\beta} \quad \begin{cases} - \text{ si } \mathrm{Im}\zeta > 0 \\ + \text{ si } \mathrm{Im}\zeta < 0 \end{cases} \tag{73}$$

Noter que cette expression est exactement le prolongement analytique de l'expression (60) valide sur l'axe réel (il faut négliger içi la légère variation de Γ_k^β en fonction de la température). On remarquera que la coupure dans le plan des fréquences complexes est conjuguée de la coupure dans le plan des temps complexes représentée par la figure 7. On obtient l'équation qui détermine $C(\vec{k}) = \overset{\vee}{\Sigma}_2(\vec{k})$ en portant (69) et (73) dans l'équation transformée de Fourier de (70) :

$$C(\vec{k}) = \frac{1}{\beta(2\pi)^3} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int d^3k'\ V(\vec{k}-\vec{k}')\ F(\vec{k}',\zeta_\ell)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k'\ V(\vec{k}-\vec{k}')\ \frac{C(\vec{k}')}{2\,E(\vec{k}')}\ g^\beta(\varepsilon_{k'}) \tag{74}$$

où nous avons introduit la fonction de coupure :

$$g^\beta(\varepsilon) = \frac{1}{\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{E - \zeta_\ell - i\Gamma^\beta} + \frac{1}{E + \zeta_\ell + i\Gamma^\beta} \right] \tag{75}$$

Température de transition

Il est impossible de calculer rigoureusement la somme (75). Toutefois, on peut se contenter, dans le cas du couplage faible, des valeurs de cette fonction dans les limites $\varepsilon \ll \Lambda$ et $\varepsilon \gtrsim \Lambda$. Dans le premier cas, $\beta\Lambda > \beta_c\Lambda \gg 1$ de sorte que $i\Gamma$ est très inférieur à $\zeta_0 = i(\pi/\beta)$ et a fortiori négligeable devant tous les ζ_ℓ . En d'autres termes, la durée de vie des quasi-particules dans la limite des basses énergies est suffisamment longue pour justifier l'approximation de Hartree et on doit simplement retrouver le facteur tangente hyperbolique de l'équation (37). On démontre aisément, en utilisant un résultat donné en Appendice par Luttinger et Ward[20], que :

$$g^\beta(\varepsilon)_{\varepsilon \to 0} = \frac{1}{\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{E - \zeta_\ell} + \frac{1}{E + \zeta_\ell} \right] = \mathrm{th}\left(\frac{\beta E}{2}\right) \tag{76}$$

Dans la limite des grandes énergies d'excitation, au contraire, le nombre d'occupation des états excités est pratiquement zéro, comme au zéro absolu; Rien n'est donc changée à la température finie T et on s'attend à retrouver la même coupure qu'à T = 0 °K . On peut justifier mathématiquement cett déduction physique en remarquant que la fonction :

$$\frac{1}{\left(\frac{\beta E}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{\beta\Gamma}{2\pi} + x\right)^2}$$

décroissante monotone, varie lentement dans l'intervalle $0, +\infty$ puisque $\beta\Gamma$ est très supérieur à 1 . On peut donc remplacer, avec une excellente précision, la somme de cette expression sur toutes les valeurs positives demi-entières de x par l'intégrale de 0 à $+\infty$, soit :

$$g^{\beta}(\epsilon) = \frac{\beta E}{\pi^2} \sum_{l=0}^{+\infty}{}' \frac{1}{\left(\frac{\beta E}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{\beta\Gamma}{2\pi}\, l + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\beta E}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{\beta E}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{\beta\Gamma}{2\pi} + x\right)^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{E}{\Gamma}\right) \qquad (77)$$

On a représenté dans la figure 8 la variation de $g^{\beta}(\varepsilon)$ en fonction de la température et de l'énergie. On note que l'effet de la moyenne thermodynamique n'apparait, comme il est naturel, que dans un intervalle d'énergie étroit $\varepsilon \lesssim KT$. Au contraire, la coupure due à la durée de vie finie des excitations élémentaires est sensiblement indépendante de la température et n'apparait (dans la limite du couplage faible) qu'à des énergies très supérieures à KT. Cette remarque nous conduit à adopter une expression simplifiée de $g^{\beta}(\epsilon)$:

$$g^{\beta}(\epsilon) = \operatorname{th}\left(\frac{\beta E}{2}\right) \qquad \text{si } \epsilon < (\Lambda/\beta_c)^{1/2}$$

$$g^{\beta}(\epsilon) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{E}{\Gamma}\right) \qquad \text{si } \epsilon > (\Lambda/\beta_c)^{1/2}$$

Cette approximation nous permet d'évaluer numériquement la température de transition T_c , déterminée implicitement par l'équation (74) lorsque $C(\hat{k}) \to 0$. Dans ce cas, l'équation (74) est linéaire par rapport aux variables angulaires et se réduit aisément à :

$$1 = N_o V_\ell \int_o^\infty g^{\beta_c}(\varepsilon)\, \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$= N_o V_\ell \left[\int_0^{(\Lambda/\beta_c)^{1/2}} \mathrm{th}\left(\frac{\beta_c \varepsilon}{2}\right) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \int_{(\Lambda/\beta_c)^{1/2}}^\infty \frac{2}{\pi} \mathrm{Arctg}\left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \right]$$

On peut ramener cette équation à une forme plus maniable en effectuant les changements de variables $y = \beta_c \varepsilon$ et $y = \Lambda/\varepsilon$ respectivement dans les deux intégrales du second membre. Il vient dans ces conditions :

$$1 = N_o V_\ell \int_0^{(\beta_c \Lambda)^{1/2}} \left[\mathrm{th}\, \frac{y}{2} + \frac{2}{\pi} \mathrm{Arctg}\, y \right] \frac{dy}{y}$$

$$= N_o V_\ell \left[\mathrm{Log}(\beta_c \Lambda) + 0{,}10 + 0\left[(\beta_c \Lambda)^{-1/2}\right] \right]$$

et finalement :

$$K T_c = 1{,}105\, \Lambda \exp\left(-\frac{1}{N_o V_\ell}\right) \qquad (80)$$

Il faut comparer ce résultat à celui qu'on aurait obtenu en utilisant l'approximation de Hartree :

$$K T_c = 1{,}14\, \varepsilon_F \exp\left(-\frac{1}{N_o V_\ell}\right)$$

L'effet des collisions se manifeste simplement par une réduction de la température de transition par le facteur (Λ/ε_F). Prenant la valeur de T_c estimée par Emery et Sessler[7] dans le cadre de l'approximation de Hartree ($T_c = 0{,}07\,^oK$) et la valeur $\Lambda = 1{,}5\,^oK$ obtenue dans l Appendice B, on prédit une température de transition corrigée de $0{,}03\,^oK$ environ. Toutefois, cette valeur est légèrement surestimée puisqu'on n'a pas tenu compte ici de la décroissance considérable de l'élément de matrice $V(\vec{k} - \vec{k}')$ dans le domaine d'intégration $|\varepsilon| < \Lambda$. On peut essayer de corriger cette erreur systématique en réduisant quelque peu la valeur du paramètre empirique Λ ce qui nous conduit à réviser la température de transition et à adopter une valeur de l'ordre de $0{,}02\,^oK$.

VI. FONCTIONS DE CORRELATION DANS LE FLUIDE CONDENSE

Nous avons vu au Chapitre II que l'on peut considérer le fluide condensé comme un système dans lequel une fraction $n_c = N_o \varepsilon_o$ des particules se trouvent sous la forme de paires cohérentes. Dans le but de préciser la nature de cette cohérence et en particulier, sa portée spatiale, nous allons étudier la fonction de correlation de deux quasi-particules à un instant donné $t = t' = 0$:

$$\left\langle n(x,\sigma)\ n(x',\sigma') \right\rangle = \left\langle \psi^+_\sigma(\vec{r})\ \psi_\sigma(\vec{r})\ \psi^+_{\sigma'}(\vec{r}')\ \psi_{\sigma'}(\vec{r}') \right\rangle \qquad (81)$$

Correlation des densités

En plus de la correlation d'échange usuelle entre les particules de spins parallèles (diagramme 9.a), il existe dans la cas d'un fluide condensé une correlation spéciale entre deux particules de spin α et β satisfaisant la condition de cohérence (diagramme 9.b). Cette nouvelle correlation est évidemment due à la possibilité d'émission et d'absorption d'une paire $\vec{r}\alpha\ ,\vec{r}'\beta$ offerte par la phase condensée. Cette correlation s'exprime donc par :

$$\left\langle \psi_\beta(\vec{r}')\ \psi_\alpha(\vec{r})\ \psi^+_\alpha(\vec{r})\ \psi^+_\beta(\vec{r}') \right\rangle = \check{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}'-\vec{r},0)\ \hat{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}-\vec{r}',0)$$
$$= \left|\check{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}'-\vec{r},0)\right|^2 \qquad (82)$$

Convenons de définir cette correlation par le rapport de l'expression (82) au nombre total n de particules par unité de volume, soit, en notations abrégées :

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{n}\left|F(\vec{r})\right|^2 \qquad (83)$$

La fraction du nombre total de particules liée à une particule donnée est donc l'intégrale de $P(\vec{r})$ sur le volume unité, soit :

$$\int P(\vec{r})\, d^3r = \frac{1}{n} \sum_{k\,k'} \int \frac{C(\vec{k})\ C^*(\vec{k}')}{4\ E(\vec{k})\ E(\vec{k}')}\ e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}\ d^3r$$

$$\int P(\vec{r})\, d^3r = \frac{1}{n} \sum_k \frac{|C(\vec{k})|^2}{4\left[E(\vec{k})\right]^2} = \frac{\pi}{4} \frac{N_o \varepsilon_o}{n} \qquad (84)$$

Nous trouvons donc, comme il est naturel, qu'une fraction (n_c / n) des particules est liée à une particule donnée par cette correlation $P(\vec{r})$ particulière à l'état condensé.

Il est également instructif d'évaluer la portée de cette correlation et pour cela, il faudrait calculer explicitement $P(\vec{r})$ ou bien $F(\vec{r})$ ce qui est malheureusement impossible en général. Cependant, on imagine que dans la limite du couplage faible, le phénomène de condensation doit faire intervenir la coopération d'un grand nombre de particules et par conséquent, la portée de $P(\vec{r})$ doit être grande devant l'espacement moyen des particules k_o^{-1}. On peut donc se contenter de calculer $P(\vec{r})$ à grande distance $r \gg k_o^{-1}$. On sait, d'après les relations (16), que :

$$F(\vec{r}) = \overset{\vee}{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}, 0) = \sum_k \frac{C(\hat{k})}{\left[\varepsilon_k^2 + |C(\hat{k})|^2\right]^{1/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Remplaçons la sommation par une intégration dans l'espace réciproque en introduisant les variables $u = \hat{k} \cdot \hat{r}$ (cosinus de l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{r}$), l'azimuth φ de $\vec{k}$ par rapport à un plan méridien fixé passant par $\vec{r}$ et $\varepsilon = v_o(k - k_o)$:

$$F(\vec{r}) = \frac{N_o}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} du \frac{C(u,\varphi)}{\left[\varepsilon^2 + |C(u,\varphi)|^2\right]^{1/2}} e^{ikru}$$

Si ε est différent de zéro, la fonction sous le signe intégrale est analytique en u et par conséquent, nous pouvons déformer le contour d'intégration pour obtenir :

$$\int_{-1}^{1} \frac{C(u,\varphi)\, e^{ikru}}{\left[\varepsilon^2 + |C(u,\varphi)|^2\right]^{1/2}} du = \int_{-1}^{-1 + i\infty} - \int_{1}^{1 + i\infty}$$

Puisque nous ne considérons ici que le cas où $kr \gg 1$, le facteur exponentiel est extrêmement petit sur tout le contour d'intégration sauf près de l'axe réel. On peut donc négliger la variation du facteur $C / (\varepsilon^2 + C^2)^{1/2}$ et prendre simplement la valeur pour $Im(u) = 0$ c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} \frac{C(u,\varphi)\, e^{ikru}}{\left[\varepsilon^2 + C(u,\varphi)^2\right]^{1/2}}\, du \approx \frac{1}{ikr}\left[\frac{C(+1)\, e^{ikr}}{\left[\varepsilon^2 + |C(+1)|^2\right]^{1/2}} - \frac{C(-1)\, e^{-ikr}}{\left[\varepsilon^2 + |C(-1)|^2\right]^{1/2}}\right]$$

Cette dernière expression ne dépend plus de la variable φ mais seulement de la valeur de la fonction $C(\hat{k})$ dans la direction du rayon vecteur, soit $C(\hat{r})$. Dans le cas d'une configuration paire (ℓ pair), $C(\hat{r})$ est égal à $C(-\hat{r})$ et il reste simplement :

$$\frac{C(\hat{r})}{ikr}\, \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{\left[\varepsilon^2 + |C(\hat{r})|^2\right]^{1/2}}$$

Dans le cas où ε est nul, on ne peut plus déformer ainsi le contour d'intégration car la fonction à intégrer présente un point de branchement aux noeuds de la fonction $C(u,\varphi)$ dans le plan u complexe. Toutefois, en intégrant d'abord par rapport à ε, on obtient (voir plus bas) un terme $C(u,\varphi) \times K_o\left[C(u,\varphi)\, r/\hbar v_o\right]$ qui se comporte comme $|C|\mathrm{Log}|C|$ lorsque $C(u,\varphi)$ tend vers zéro. La contribution des points de branchement est donc de l'ordre de :

$$\int_{-1}^{1} du \int_{0}^{2\pi} d\varphi\; C(u,\varphi)\, \mathrm{Log}|C(u,\varphi)|\; e^{ik_o ru}$$

et par conséquent négligeable lorsque $C(u,\varphi)$ n'a que des zéro isolés. Finalement nous pouvons donc écrire :

$$F(\vec{r}) = \frac{N_o\, C(\hat{r})}{2ir} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{\left[\varepsilon^2 + |C(\hat{r})|^2\right]^{1/2}}\, \frac{d\varepsilon}{k}$$

Développant k en série de puissances de ε au voisinage du niveau de Fermi :

$$k = k_o + \frac{\varepsilon}{\hbar v_o} + \ldots$$

$$e^{ikr} = e^{ik_o r}\left(\cos\frac{r\varepsilon}{\hbar v_o} + i \sin\frac{r\varepsilon}{\hbar v_o}\right) + \ldots$$

Nous obtenons :

$$F(\vec{r}) = N_o\, C(\hat{r})\, \frac{\sin(k_o r)}{k_o r} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{r\varepsilon}{\hbar v_o}\, \frac{d\varepsilon}{\left[\varepsilon^2 + |C(\hat{r})|^2\right]^{1/2}}$$

$$= 2\, N_o\, C(\hat{r})\, \frac{\sin(k_o r)}{k_o r}\, K_o\left(\frac{r\,|C(\hat{r})|}{\hbar v_o}\right) \qquad (85)$$

K_o est la fonction de Bessel modifiée de secondeespèce, d'ordre zéro. Son expression asymptotique est $(\pi/2z)^{1/2}\ e^{-z}$ et par conséquent, la décroissance de $\hat{F}(\vec{r})$ à grande distance est dominée par un facteur exponentiel :

$$\exp\left(-\frac{r\ C(\hat{r})}{\hbar\ v_o}\right) \approx\approx \exp\left(-\frac{r}{r_c}\right)$$

où r_c est le rayon de cohérence :

$$r_c \approx\approx k_o^{-1}\left(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_o}\right) \qquad (86).$$

Le rayon de cohérence ou portée de la fonction de correlation $P(\vec{r})$ est d'autant plus grand que le couplage, mesuré par ε_o, est faible.

Correlation courant-densité

Le processus (8.b) responsable de la correlation à longue portée dans le fluide condensé, induit également une correlation entre la densité et le courant de particules. Dans le cas général d'un fluide isotrope, le courant de particule moyen autour d'une particule donnée est nécéssairement nul, par raison de symétrie. Dans le cas présent, cependant, cette symétrie n'existe plus à cause de l'anisotropie de la fonction $C(\hat{k})$. Nous allons voir qu'il en résulte une correlation non nulle entre la densité $n(x,\alpha)$ et le courant $\vec{j}(x',\beta)$ à un instant donné. On a en effet :

$$\left\langle n(\vec{r},\alpha)\ \vec{j}(\vec{r}',\beta)\right\rangle = \frac{\hbar}{2iM}\left\{\hat{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}-\vec{r}',0)\ \nabla\check{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}'-\vec{r},0) - \check{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}'-\vec{r},0)\ \nabla\hat{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}-\vec{r}',0)\right\} \qquad (87)$$

Par analogie avec le paragraphe précédent, définissons la fonction de correlation :

$$\vec{Q}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2inM}\left\{F^*(\vec{r})\ \vec{\nabla}F(\vec{r}) - F(\vec{r})\ \vec{\nabla}F^*(\vec{r})\right\}$$

Il est facile de séparer la dépendance de Q par rapport au module et à la phase de F :

$$\vec{Q}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{nM}\left|F(\vec{r})\right|^2\ \vec{\nabla}\gamma(\vec{r}) = \frac{\hbar}{M}P(\vec{r})\ \vec{\nabla}\gamma(\vec{r}) \qquad (88)$$

avec :
$$F(\vec{r}) = \left|F(\vec{r})\right|\ e^{i\gamma(\vec{r})}$$

Cette relation est suffisante, dans le cas où la solution $C(\hat{k})$ présente une symétrie de rotation autour de l'axe Oz, pour déterminer complètement le courant de correlation. Dans ce cas $C(\hat{k}) \simeq Y_\ell^m(\theta,\varphi)$, on voit en opérant une rotation autour de Oz que $\gamma(\vec{r})$ est simplement $m\varphi$, de sorte que $\vec{Q}(\vec{r})$ se réduit à une composante tangentielle :

$$Q_\varphi(\vec{r}) = \frac{m\hbar}{M} \frac{P(\vec{r})}{r}$$

Cette relation indique que dans ce cas simple, l'ensemble des particules liées à une particule donnée par la correlation $P(\vec{r})$ tourne suivant la loi des aires. Un phénomène de circulation tangentielle analogue se produit dans le cas de la configuration C_5 ($\ell = 2$) mais à cause de la symétrie cubique de $|C(\hat{k})|$, il n'en résulte aucun moment cinétique net. On représenté cette circulation (figure 10) dans le cas de la configuration C_5 :

$$Q_\varphi \simeq \sin^2\theta\,(3\cos^2\theta - 1)\cos 2\varphi$$

$$Q_\theta \simeq \sin 2\theta \sin 2\varphi$$

On peut se demander si cette correlation entre le courant et la densité pourrait éventuellement donner lieu à un phénomène observable. Il n'en est probablement rien car premièrement, cet effet ne saurait se manifester qu'en surface (puisque les circulations autour de deux particules voisines à l'intérieur du fluide se détruisent en moyenne) et deuxièmement, cet effet ne donne naissance à aucun moment cinétique net dans le cas de l'Hélium 3 . Cette circulation n'est donc pas le moyen de mettre en évidence expérimentalement l'anisotropie de la fonction $C(\hat{k})$.

VII. SUPERFLUIDITE

Nous avons mentionné dans l'introduction que les expériences n'ont pas mis en évidence, jusqu'à présent, l'existence d'un état condensé de l'Hélium 3. En particulier, on a toujours observé que la fraction Hélium 3 dans un mélange des deux isotopes, ne participe pas à l'écoulement superfluide de l'Hélium 4. Toutefois, la théorie que nous venons d'exposer suggère que l'Hélium 3 ne reste pas un liquide de Fermi normal jusqu'au zéro absolu mais subit une transition dans un état condensé caractérisé par la présence de paires cohérentes et un spectre d'énergies d'excitation anormal (18). Nous nous proposons de montrer que ce spectre anormal entraine une modification radicale des propriétés de transport : le fluide condensé est superfluide.

Du point de vue expérimental, on entend par superfluidité la propriété d'écoulement sans viscosité apparente le long des parois du récipient. Cependant, cette définition ne se traduit pas aisément sur le plan théorique car on ne sait pas, en général, exprimer à l'échelle microscopique l'interaction entre les particules du fluide et les parois solides. Pour tourner cette difficulté, il est nécéssaire comme le souligne Blatt[21], d'opérer dans un système de coordonnées dans lequel les parois sont immobiles. On remplace ainsi le mouvement du récipient par un champ de force agissant sur les particules et on y gagne de pouvoir négliger les interactions avec les parois suivant l'hypothèse habituelle de la mécanique statistique. On est limité, pour des raisons d'invariance Galiléenne, aux déplacements qui ne changent pas la forme du récipient c'est-à-dire, en pratique, les rotations. Nous allons donc décrire une situation toutafait semblable à celle de la mesure de la viscosité par la méthode des disques tournants[22] : un système de particules contenu dans un réservoir cylindrique tournant d'un mouvement uniforme (vitesse angulaire ω) autour de son axe. La transformation canonique qui fait passer du système de coordonnées fixe au système entrainé, transforme l'Hamiltonien H du système de particules en un nouvel Hamiltonien H' :

$$H' = H - \vec{\omega} . \vec{L} \qquad (89)$$

où $\vec{L}$ est le moment cinétique total.

Dans le formalisme de la seconde quantification, le passage au système de coordonnées entrainé introduit donc une perturbation :

$$H^A = \int \psi^+(x) \left[i\hbar \vec{A}(\vec{r}).\vec{\nabla} \right] \psi(x) \; d^3r$$

$$= - M \int \vec{J}(\vec{r}).\vec{A}(\vec{r}) \; d^3r \qquad (90)$$

où nous avons introduit le champ des vitesses d'entrainement $\vec{A}(\vec{r})$ et l'opérateur courant de particules $\vec{J}(\vec{r})$. On a également utilisé la relation d'analyse vectorielle :

$$\vec{\omega}.(\vec{r}\wedge\vec{\nabla}) = (\vec{\omega}\wedge\vec{r}).\vec{\nabla} = \vec{A}(\vec{r}).\vec{\nabla}$$

Sous cette forme (90), le présent problème apparait identique, formellement, au calcul du courant de transport induit par un champ magnétique statique uniforme dans un fluide condensé d'électrons, c'est-à-dire un cas particulier des propriétés électromagnétiques des supraconducteurs. La solution de ce problème général soulève de sérieuses difficultés concernant l'invariance de jauge ; ces difficultés ont fait l'objet de nombreuses études[23] à la suite de la publication originale de BCS. On conclut toutefois que ces problèmes liés à l'invariance de jauge ne se manifestent pas dans le cas particulier (90) correspondant au calcul de la conductivité transverse pour un système d'électrons supraconducteurs. Il est donc admissible d'utiliser ici la méthode de calcul de BCS (non invariante par transformation de jauge) : on obtient ainsi avec le minimum de complexité mathématique, une expression du courant en fonction de la vitesse d'entrainement qui nous permettra de démontrer simplement le phénomène qui nous intéresse. Cette méthode consiste à évaluer explicitement tous les éléments de matrice qui apparaissent dans le développement de $\vec{J}(r)$ limité au premier ordre de la perturbation H^A (affectés du poids statistique convenable) :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_i \left\{ \frac{\langle \varphi_o | H^A | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | J | \varphi_o \rangle}{W_o - W_i} + \text{Complexe conjugué} \right\} \qquad (91)$$

La sommation est étendue aux états φ_i du système ayant la même configuration spatiale que φ_o (car deux états qui n'ont pas la même configuration spatiale, en particulier correspondant à des orientations différentes du système d'axes dans l'espace réciproque, sont orthogonaux) mais correspondant à des nombres d'occupation différents des états individuels $\vec{k}\sigma$.

Bien que cela ne soit pas absolument légitime, on utilisera les représentations de Fourier suivantes (il faudrait en toute rigueur utiliser un développement en série d'harmoniques cylindriques) :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2M} \sum_{k\,k'\sigma} (\vec{k}+\vec{k}')\ e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}\ c^{+}_{k'\sigma}\, c_{k\sigma}$$

$$H^{A} = -\frac{\hbar}{2} \sum_{k\,k'\sigma} (\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{A}(k-k')\ c^{+}_{k'\sigma}\, c_{k\sigma}$$

où $\vec{A}(q)$ est le tranformé de Fourier du champ de vitesse d'entrainement $\vec{A}(r)$. Portons ces expressions dans (91) et effectuons la somme sur les spins de façon à associer explicitement $\vec{k}$ avec le spin $\uparrow$ et $-\vec{k}$ avec le spin $\downarrow$. On tient compte automatiquement du terme complexe conjugué en sommant sur $\vec{k}$ et $\vec{k}'$, de sorte que l'on obtient simplement :

$$\vec{J}(r) = \frac{\hbar}{2M} \sum_{k\,k'} (\vec{k}+\vec{k}') \left[(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{A}(k'-k)\right] L(\vec{k},\vec{k}') \qquad (92)$$

$$L(\vec{k},\vec{k}') = -\sum_{i} \frac{\left|\langle\varphi_i|\,(c^{+}_{k'\uparrow}c_{k\uparrow} - c^{+}_{-k\downarrow}c_{-k'\downarrow})\,|\varphi_o\rangle\right|^2}{W_o - W_i} \qquad (93)$$

Si $\vec{A}(r)$ ne présente pas de gradient important, on peut se contenter de calculer $\vec{J}(r)$ dans la limite des grandes longueurs d'onde spatiales (c'est-à-dire la limite $(\vec{k}'-\vec{k}) \to 0$). Bardeen, Cooper et Schrieffer ont analysé en détail la somme (93) et ils ont montré que $L(\vec{k},\vec{k}')$ a une expression simple dans cette limite des grandes longueurs d'onde :

$$\lim_{\vec{k}'\to\vec{k}} L(\vec{k},\vec{k}') = \frac{f(E') - f(E)}{E - E'} = -\frac{d\,f(E)}{dE} \qquad (94)$$

où $f(E)$ est la distribution de Fermi relative à l'énergie d'excitation $E = E(\vec{k})$. Finalement :

$$\lim_{q\to 0} \vec{J}(q) = \frac{2\beta\hbar^2}{M} \sum_{k} \vec{k}\left[\vec{A}(q)\cdot\vec{k}\right] \frac{e^{\beta E(k)}}{\left[1 + e^{\beta E(k)}\right]^2} \qquad (95)$$

Evaluons d'abord cette expression dans le cas d'un fluide de Fermi normal. Le facteur $e^{\beta E}/(1+e^{\beta E})^2$ présente un maximum aigu pour $E = 0$ et par conséquent, seuls les vecteurs de l'espace réciproque au voisinage de la sphère de Fermi interviennent réellement dans la somme (95). On peut donc remplacer le produit $\vec{k}\left[\vec{A}(q)\cdot\vec{k}\right]$ par sa valeur moyenne sur la sphère de Fermi , c'est-à-dire $\frac{1}{3}\ k_o^2\ \vec{A}(q)$; on en déduit immédiatement que :

$$\lim_{q\to 0} \vec{J}_n(q) = 2\beta \frac{k_o^3}{3\pi^2}\ \vec{A}(q) \int_0^\infty \frac{e^{\beta\epsilon}}{\left[1+e^{\beta\epsilon}\right]^2}\ d\epsilon = n\ \vec{A}(q) \qquad (96)$$

Nous trouvons donc qu'un fluide (visqueux) normal est <u>entraîné à la même vitesse que le récipient</u> qui le contient : l'état thermodynamiquement stable est celui où le fluide est au repos par rapport au récipient. Nous allons voir qu'il n'en est plus de même dans le cas d'un fluide condensé doué d'un spectre d'excitation anormal (18), et en particulier dans le cas de l'Hélium 3 condensé. En effet, la contribution principale à la somme (95) provient , dans la limite des basses températures, des régions de la sphère de Fermi voisines des noeuds de la fonction $C(\hat{k})$, c'est-à-dire, dans le cas de l'Hélium 3, des points $|k_x| = |k_y| = |k_z|$. On voit dans ces conditions, que le produit $\vec{k}\left[\vec{A}(q)\cdot\vec{k}\right]$ donne encore un facteur $\frac{1}{3}\ k_c^2\ \vec{A}(q)$ comme plus haut (ceci est du à la symétrie cubique de C_5). Donc :

$$\lim_{q\to 0} \vec{J}(q) = \frac{2\hbar^2 k_o^2 \beta}{3M}\ \vec{A}(q) \sum_k \frac{e^{\beta E(k)}}{\left[1+e^{\beta E(k)}\right]^2} \qquad (97)$$

Il est remarquable que la somme qui intervient dans cette expression soit a même que celle qui apparait dans le calcul de la susceptibilité paramagnétique. On obtient donc de même :

$$\lim_{q\to 0} \vec{J}(q) = \vec{J}_n(q) \times 1{,}08 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \qquad (98)$$

Ceci suggère une interprétation du système condensé suivant le modèle des deux fluides, l'un normal et l'autre superfluide. Le rapport $1{,}08\ (T/T_c)^2$ est la fraction de fluide normal dans le"mélange" . Cette fraction seule participe à la rotation du récipient comme un liquide visqueux ordinaire et possède une susceptibilité paramagnétique normale.

CONCLUSION

Sur le plan théorique, la présente étude a conduit à deux résultats importants. Premièrement, on a démontré pour une classe assez étendue de systèmes de fermions, que la distribution de Fermi est instable aux températures suffisamment basses : il suffit pour cela qu'un terme au moins du développement du potentiel d'interaction des quasi-particules soit attractif. Deuxièmement, cette étude a permis de mettre en évidence l'existence d'une solution parasite des équations de Gor'kov relatives aux systèmes de Fermi condensés, solution parasite qui n'apparait pas dans le cas de la condensation de type s ($\ell = 0$) traitée dans le cadre de la théorie de la supraconductivité.

La méthode variationnelle (dite de l'Hamiltonien réduit) ainsi que la méthode des fonctions de correlation (dans le cadre de l'approximation de Bogoliubov) conduisent à la même solution correspondant à un état condensé superfluide. Le caractère le plus remarquable de cet état condensé est sa configuration anisotrope. Bien que le fluide de Fermi soit isotrope dans l'état normal et que l'interaction qui produit la condensation soit radiale, on ne doit rien voir d'anormal dans ce résultat car il est usuel la transition vers un état plus ordonné soit accompagnée d'une réduction du degré de symétrie. Le phénomène de ferromagnétisme est un exemple de cet effet puisque des forces de nature électrostatique (donc radiales) produisent la transition d'un système de spins d'un état désordonné isotrope à un état ordonné anisotrope. Toutefois, cette anisotropie est sans doute locale seulement dans le cas de l'Hélium 3 car il n'existe pas de matrice matérielle (réseau cristallin dans le cas du ferromagnétisme) capable de fixer les axes d'anisotropie à l'échelle macroscopique. Dans le cas $\ell = 2$, l'anisotropie est d'ailleurs d'un caractère assez subtil puisque l'état condensé présente la symétrie cubique. Toutes les propriétés tensorielles du fluide condensé sont donc isotropes (voir l'expression 78 par exemple). L'anisotropie et plus précisément, l'existence de noeuds de la fonction $C(\vec{k})$ ne se manifestent que par l'intermédiaire de facteurs scalaires et leur variation en fonction de la température : ainsi les variations de la chaleur spécifique ou de la susceptibilité paramagnétique sont différentes de la variation exponentielle qui caractérise l'état condensé isotrope (bande interdite dans le spectre des énergies d'excitation).

Sur le plan expérimental, nous prédisons l'existence d'un état superfluide de l'Hélium 3 stable à très basse température. A cause de l'incertitude qui entoure les déterminations de l'interaction effective des quasi-particules dans le fluide normal, il n'a pas été possible d'évaluer avec précision la température critique T_c au-dessous de laquelle l'état de Fermi devient instable : une erreur modeste sur l'interaction entraine en effet une forte erreur sur T_c puisque le potentiel V entre sous la forme d'un facteur exponentiel dans l'expression de la température critique. En prenant la valeur $N_o V_2$ évaluée par Emery et Sessler et en tenant compte de l'effet des collisions inélastiques limitant la durée de vie des quasi-particules, on a estimé une température de transition de 0,02 °K. Cette valeur est certainement excessive si on se réfère au résultat négatif des expériences de Wheatley qui imposent à la température de transition une limite supérieure de 0,008 °K. Cet écart est toutefois insuffisant pour qu'on puisse y voir une contradiction flagrante entre la théorie et l'expérience. Comme nous l'avons souligné, il est possible que la valeur calculée de $N_o V_2$ soit surestimée. D'un autre côté, il n'est pas impossible que le résultat négatif de Wheatley soit du à des conditions expérimentales défavorables qui auraient maintenu l'Hélium dans l'état normal métastable. Dans ces expériences en effet, l'Hélium est en contact intime avec une substance paramagnétique finement divisée (agent réfrigérant); si les collisions avec ces impuretés sont suffisamment fréquentes, les états propres (approximatifs) du système ne sont plus des quasi-particules $\vec{k}$ mais des combinaisons linéaires essentiellement isotropes des états excités individuels $\vec{k}$. Dans le cas $\ell = 0$, cette diffusion par les impuretés ne modifie pas essentiellement le phénoméne de condensation comme l'a démontré Anderson (théorie des supraconducteurs"sales"). Dans le cas de l'Hélium 3 au contraire, cet effet maintiendrait le fluide dans l'état normal puisque l'énergie de liaison des paires condensées est due à un terme anisotrope du développement de l'interaction en harmoniques sphériques, terme qui disparait si le potentiel est symétrisé par la diffusion par les impuretés.

Dans ces conditions, il apparait prématuré de tirer une conclusion définitive de la comparaison entre la présente théorie et les observations expérimentales. La possibilité de l'état condensé de l'Hélium 3 nous parait suffisamment bien fondée, dans le cadre de la théorie moderne de la condensation des systèmes de fermions, pour justifier une prédiction de son existence.

APPENDICE A

Le but de cet Appendice est de classer et si possible déterminer complètement toutes les solutions indépendantes de l'équation intégrale :

$$C(\hat{k}) = \frac{2\ell+1}{2} V_\ell \sum_{k'} P_\ell(\hat{k}\cdot\hat{k}') \frac{C(\hat{k}')}{\left[\varepsilon_{k'}^2 + |C(\hat{k}')|^2\right]^{1/2}} \qquad (A.1)$$

On voit de suite que cette équation est invariante par les transformations T sur la sphère unitaire qui conservent le produit scalaire c'est-à-dire les rotations et les symétries par rapport à un plan méridien. En d'autres termes, si $C(\hat{k})$ est une solution, il en est de même de $C(T\hat{k})$ puisque :

$$C(\hat{Tk}) = \frac{2\ell+1}{2} V_\ell \sum_{k'} P_\ell(\hat{Tk}\cdot\hat{Tk}') \frac{C(\hat{Tk}')}{\left[\varepsilon_{Tk'}^2 + |C(\hat{Tk}')|^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{2\ell+1}{2} V_\ell \sum_{k'} P_\ell(\hat{k}\cdot\hat{k}') \frac{C(\hat{Tk}')}{\left[\varepsilon_{k'}^2 + |C(\hat{Tk}')|^2\right]^{1/2}} \qquad (A.2)$$

D'autre part, $C(\hat{k})$ n'apparait dans le spectre d'excitation (18) et dans l'expression des propriétés physiques du système, que sous la forme $|C(\hat{k})|^2$: nous considérerons donc comme équivalentes deux solutions qui ne diffèrent que par un facteur de phase constant $e^{i\alpha}$. On note d'ailleurs que l'équation (A.1) est également invariante par le "changement de jauge" qui consiste à multiplier une solution $C(\hat{k})$ par un facteur de phase constant.

Limitons nous maintenant à $\ell = 2$ (cas de l'Hélium 3 condensé) : une solution de (A.1) est une certaine combinaison linéaire d'harmoniques sphériques d'ordre 2. La combinaison la plus générale de ce genre dépend de dix paramètres et on peut l'écrire en coordonnées cartésiennes ($x^2+y^2+z^2=1$), sous la forme suivante :

$$C(\hat{k}) = A(2z^2 - x^2 - y^2) + B(x^2 - y^2) + Cxy + Dyz + Ezx$$
$$+ i\left\{A'(2z^2 - x^2 - y^2) + B'(x^2 - y^2) + C'xy + D'yz + E'zx\right\}$$
$$= C_r(\hat{k}) + i\, C_i(\hat{k})$$

Nous nous proposons d'éliminer les paramètres superflus en utilisant l'invariance de (A.1) par rapport aux transformations T. Tout d'abord, on peut toujours diagonaliser la partie réelle $C_r(\hat{k})$ d'une solution quelconque par une rotation convenable. Nous pouvons donc poser, sans perte de généralité :

$$C_r(\hat{k}) = A(2z^2 - x^2 - y^2) + B(x^2 - y^2) \qquad (A.3)$$

Considérons d'abord le cas où A et B sont différents de zéro; le groupe des symétries de C_r comprend alors $R_1(x \to -x)$, $R_2(y \to -y)$, $R_3(z \to -z)$ et leurs produits uniquement. On déduit de (A.1) que C_r et C_i doivent satisfaire les identités :

$$\int \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \; \frac{C_r}{\left[\varepsilon^2 + C_r^2 + C_i^2\right]^{1/2}} \; d\Omega = 0$$

$$\int \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \; \frac{C_r}{\left[\varepsilon^2 + C_r^2 + C_i^2\right]^{1/2}} \; d\Omega = 0 \qquad (A.4)$$

$$\int \sin^2\theta \sin 2\varphi \; \frac{C_r}{\left[\varepsilon^2 + C_r^2 + C_i^2\right]^{1/2}} \; d\Omega = 0$$

Et ceci n'est possible que si $C_i^2(\hat{k})$ est également invariant par R_1 , R_2 et R_3. C_i doit donc prendre indifféremmment l'une des formes suivantes :

$$C_i(\hat{k}) = A'(2z^2 - x^2 - y^2) + B'(x^2 - y^2) \qquad (a)$$

$$= C'xy \qquad (b)$$

$$= D'yz \qquad (c)$$

$$= E'zx \qquad (d) \qquad (A.5)$$

Dans la première éventualité (a), on trouve en répétant pour C_i le même raisonnement que pour C_r , que les coefficients A' et B' sont nécéssairement proportionnels à A et B, respectivement. On peut éliminer complètement la partie imaginaire en multipliant $(C_r + i\, C_i)$ par un facteur de phase convenable et il ne reste qu'une expression proportionnelle à (A.3). D'autre part, on montre aisément l'équivalence des trois autres formes possibles (b), (c) et (d) en utilisant les transformations $z \leftrightarrow x$ et $z \leftrightarrow y$. Finalement, l'ensemble des solutions ayant la

partie réelle (A.3) se réduit à la forme suivante qui ne dépend que de trois paramètres indépendants :

$$C(\hat{k}) = A(2z^2 - x^2 - y^2) + B(x^2 - y^2) + iCxy \qquad (A.6)$$

La situation se complique quelque peu si C_r possède un degré de symétrie plus élevé. Supposons d'abord que le coéfficient B de (A.3) soit nul. Pour que ceci soit possible, il faut que C_i et C_r satisfassent, en plus des identités (A.4), la relation :

$$\int \sin^2\theta \cos 2\varphi \, \frac{C_r}{\left[\varepsilon^2 + C_r^2 + C_i^2\right]^{1/2}} \, d\Omega = 0$$

Il faut donc que C_i^2 soit invariant par la rotation R_4 $(\varphi \to \varphi + \frac{\pi}{4})$. Cette condition est d'ailleurs suffisante et nous conduit à l'une ou l'autre des combinaisons suivantes :

$$C(\hat{k}) = (A + iA')(2z^2 - x^2 - y^2) \qquad (a)$$

$$= A(2z^2 - x^2 - y^2) + iB'(x^2 - y^2) + iC'xy \qquad (b)(A,7)$$

On a déjà obtenu la première combinaison et on peut ramener la seconde à la forme (A.6) par une rotation autour de l'axe Oz (éliminant le terme $(x^2 - y^2)$ de la partie imaginaire). Nous n'avons donc obtenus aucune solution nouvelle.

Considérons maintenant le cas A = 0. En répètant le même raisonnement, nous voyons que C_i et C_r doivent satisfaire, en plus des identités (A.4), l'identité :

$$\int (3\cos^2\theta - 1) \, \frac{C_r}{\left[\varepsilon^2 + C_r^2 + C_i^2\right]^{1/2}} \, d\Omega = 0$$

où C_r est proportionnel à : $\sin^2\theta \cos 2\varphi$. Dans ces conditions, C_i^2 doit être invariant par l'un des quatre groupes de symétries suivants (condition nécéssaire et suffisante) :

R_1 , R_2 et R_4

R_1 , R_3 et R_4

R_3 et $R_1R_4(\varphi \to \frac{\pi}{2} - \varphi)$

$R_1R_2(\varphi \to \varphi + \pi)$ et R_1R_4

Les deux premiers groupes conduisent à des cas particuliers de la solution (A.6) précédente. D'autre part, les conditions d'invariance par le troisième et le dernier groupe sont équivalentes et conduisent à trois types de solution possibles:

$$C(\hat{k}) = B(x^2 - y^2) + iA'(2z^2 - x^2 - y^2) + iC'xy \qquad (a)$$
$$= B(x^2 - y^2) + iD'z(x+y) \qquad (b)$$
$$= B(x^2 - y^2) + iD'z(x-y) \qquad (c)(A.8)$$

On ramène (a) à la forme (A.5) en la multipliant par i et en effectuant le changement de variable $x \to (x+y)/\sqrt{2}$ et $y \to (x-y)/\sqrt{2}$. Par contre, les combinaisons (b) et (c) sont effectivement nouvelles. Le même changement de variable permet de les écrire sous la forme plus compacte :

$$C(\hat{k}) = A\,zx + iB\,zy \qquad (A.9)$$

En résumé, nous avons démontré en utilisant uniquement les propriétés de symétrie de l'équation (A.1), que les solutions indépendantes appartiennent nécéssairement à l'un des types (A.6) ou (A.9) ci-dessus, qui dépendent respectivement de trois et deux paramètres indépendants (au lieu de dix). Pour déterminer plus présisément ces solutions, nous allons repasser en coordonnées sphériques et écrire explicitement $C(\hat{k})$ comme une somme de Y_2^m.

1/ $C(\hat{k}) = \Delta_o Y_2^0 + \Delta_2 Y_2^2 + \Delta_{-2} Y_2^{-2}$

En portant cette expression dans (A.1), on voit que cette équation se décompose en un système d'équations intégrales couplées que nous écrirons sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta_o &= a_{oo}\,\Delta_o + a_{02}\,(\Delta_2 + \Delta_{-2}) \\
\Delta_2 &= a_{02}\,\Delta_o + a_{22}\,\Delta_2 + b_{22}\,\Delta_{-2} \\
\Delta_{-2} &= a_{02}\,\Delta_o + b_{22}\,\Delta_2 + a_{22}\,\Delta_{-2}
\end{aligned} \qquad (A.10)$$

en introduisant la notation :

$$a_{\mu\mu'} = N_o V_2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \int d\Omega \, \frac{Y_2^{\mu *} Y_2^{\mu'}}{E(\vec{k})}$$

$$b_{\mu\mu} = N_o V_2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \int d\Omega \frac{(Y_2^{\mu})^2}{E(\vec{k})}$$

Ces quantités ne sont naturellement pas des coéfficients constants mais dépendent de la solution $C(\hat{k})$ par l'intermédiaire de $E(\vec{k})$. Pour les calculs numériques, il est pratique d'utiliser des expressions plus élaborées que l'on déduit des définitions ci-dessus avec l'aide de la relation (28) :

$$a_{\mu\mu'} - \delta_{\mu\mu'} = -N_o V_2 \left[\delta_{\mu\mu'} \operatorname{Log} D + \int Y_2^{\mu *} Y_2^{\mu'} \operatorname{Log} |f(\hat{k})| \, d\Omega \right]$$
$$b_{\mu\mu} = -N_o V_2 \int (Y_2^{\mu})^2 \operatorname{Log} |f(\hat{k})| \, d\Omega \qquad \text{(A.11)}$$

En combinant les deux dernières équations (A.10), on obtient le système équivalent:

$$\begin{aligned} (a_{00} - 1)\Delta_0 + a_{02}(\Delta_2 + \Delta_{-2}) &= 0 \\ 2a_{02}\Delta_0 + (a_{22} + b_{22} - 1)(\Delta_2 + \Delta_{-2}) &= 0 \\ (a_{22} - b_{22} - 1)(\Delta_2 - \Delta_{-2}) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.12)}$$

<u>1er cas</u> : $a_{22} - b_{22} - 1 \neq 0$

La tabulation numérique des coéfficients $a_{\mu\mu'}$ et $b_{\mu\mu}$ en fonction des deux paramètres indépendants Δ_0 et $\Delta_2 = \Delta_{-2}$ montre que le système (A.12) admet quatre solutions de ce type :

$$\begin{aligned} C(\hat{k}) &= \Delta\, Y_2^0 , && \operatorname{Log} D = 1{,}02 \\ C(\hat{k}) &= \Delta\left[(\sqrt{3}/2)\, Y_2^0 + (1/\sqrt{8})(Y_2^2 + Y_2^{-2})\right], && \operatorname{Log} D = 0{,}98 \\ C(\hat{k}) &= \Delta\left[\, 1/2\; Y_2^0 + (\sqrt{3}/\sqrt{8})(Y_2^2 + Y_2^{-2})\right], && \operatorname{Log} D = 1{,}02 \\ C(\hat{k}) &= \Delta\, (1/\sqrt{2})(Y_2^2 + Y_2^{-2}) , && \operatorname{Log} D = 0{,}98 \end{aligned} \qquad \text{(A.13)}$$

Ces quatre solutions ne sont d'ailleurs pas indépendantes car une rotation de 90° amène a première sur la troisième et la seconde sur la quatrième.

<u>2e cas</u> : $a_{22} - b_{22} - 1 = 0$; $(a_{00} - 1)(a_{22} - 1) \neq a_{02}^2$

Ces conditions peuvent se trouver réalisées si Δ_o est nul mais ceci n'apporte aucune solution nouvelle, comme on le voit aisément par une rotation autour de

l'axe Oz. Il suffit donc de considérer le cas $\Delta_2 = -\Delta_{-2}$. Içi, la tabulation numérique des coefficients $a_{\mu\mu'}$ et $b_{\mu\mu}$ en fonction des paramètres indépendants Δ_o et Δ_2 ne donne qu'une seule solution nouvelle :

$$C(\hat{k}) = \Delta \left[(1/\sqrt{2})\, Y_2^0 + (1/2)(Y_2^2 - Y_2^{-2}) \right] , \qquad \text{Log D} = 1{,}154 \tag{A.14}$$

Cette solution est remarquable d'abord parce que le"facteur de forme" D qui lui correspond est le plus favorable et ensuite à cause de son haut degré de symétrie. On peut en effet écrire (après une rotation de 45o autour de l'axe Oz) :

$$|C(\hat{k})|^2 = \Delta^2 \left[\frac{1}{2} (Y_2^0)^2 + \cos^2 2\varphi\, |Y_2^2|^2 \right]$$

$$= \frac{5\Delta^2}{8\pi} \left[x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 \right] \tag{A.15}$$

On voit sous cette forme que $|C(\hat{k})|$ a la <u>symétrie cubique</u> et présente six maxima égaux ($\sqrt{\frac{5}{8\pi}}\,\Delta$) sur les axes Ox, Oy et Oz et huit noeuds aux points $|x| = |y| = |z|$. On note également que dans ce cas particulier, le système (A.12) se réduit à une seule équation, car la symétrie cubique de $E(\vec{k})$ entraine l'identité :

$$a_{00} - 1 = a_{22} - b_{22} - 1$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire (avec l'aide de(A.11)) cette égalité sous la forme équivalente :

$$\int (Y_2^0)^2 \ \text{Log}|f| \ d\Omega = \int 2 \sin^2 2\varphi\, |Y_2^2|^2 \ \text{Log}|f| \ d\Omega$$

ou encore,compte-tenu de la symétrie cubique de $|f(\hat{k})|$:

$$\int (2z^2 - x^2 - y^2)^2 \ \text{Log}|f| \ d\Omega = \int 6(z^4 - x^2y^2) \ \text{Log}|f| \ d\Omega$$

$$= \int 2(x^2 - y^2)^2 \ \text{Log}|f| \ d\Omega \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>3e cas</u> : $a_{22} - b_{22} - 1 = 0$; $(a_{00} - 1)(a_{22} - 1) = a_{02}^2$

Ces conditions peuvent être satisfaite sous la forme particulière :

$$a_{22} - 1 = b_{22} = a_{02} = 0$$
$$a_{00} - 1 = 0$$

par la solution simple:

$$C(\hat{k}) = \Delta\, Y_2^2 \quad , \qquad \text{Log D} = 1{,}131 \tag{A,16}$$

A cause de la complexité du calcul numérique, il ne nous a pas été possible de vérifier qu'aucune solution du type général (A.6) ne peut satisfaire ces conditions sous leur forme générale ($a_{02} \neq 0$). L'existence d'une telle solution serait due à un caractère fortuit de la fonction $E(\vec{k})$ plutôt qu'à la symétrie des équations : une telle solution est donc peu probable. On peut d'ailleurs citer en faveur de ce raisonnement le résultat de l'étude par V. Emery[17] de l'équation (A.1) dans la limite $|C(\hat{k})| \to 0$: cet auteur trouve que le développement de (A.1) en série de puissances de $C(\hat{k})$ n'admet que des solutions que nous avons explicitement considérées ici (Emery trouve d'ailleurs des solutions que nous avons explicitement éliminées, ce qui n'est pas étonnant puisque les conditions d'existence dans la limite $|C(\hat{k})| \to 0$ sont probablement moins strictes que les conditions d'existence d'une solution de l'équation générale).

2/ $C(\hat{k}) = \Delta_1 Y_2^1 + \Delta_{-1} Y_2^{-1}$

Pour terminer cette étude, nous citerons rapidement les quatre solutions de ce type, qui satisfont les conditions d'existence :

$$(a_{11} - 1)\Delta_1 + b_{11}\Delta_{-1} = 0$$
$$b_{11}\Delta_1 + (a_{11} - 1)\Delta_{-1} = 0$$

On trouve :

$$C(\hat{k}) = \Delta Y_2^1 \quad \text{ou} \quad \Delta Y_2^{-1}, \qquad \text{Log D} = 1{,}131 \qquad \text{(A.17)}$$
$$C(\hat{k}) = \Delta(1/\sqrt{2})(Y_2^1 \pm Y_2^{-1}), \qquad \text{Log D} = 0{,}98$$

Cette dernière solution étant d'ailleurs équivalente à (A.13) (rotation de 90°).

Finalement, nous avons obtenus 5 solutions indépendantes de l'équation (A.1) que nous pouvons classer par ordre de mérite (déterminé par le "facteur de forme") :

$$C_1 = xy, \qquad \text{Log D} = 0{,}98$$
$$C_2 = 3z^2 - 1, \qquad \text{Log D} = 1{,}02$$
$$C_3 = z(x + iy), \qquad \text{Log D} = 1{,}131$$
$$C_4 = (x + iy)^2, \qquad \text{Log D} = 1{,}131$$
$$C_5 = z^2 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 y^2, \ (\varepsilon = \sqrt[3]{1}), \qquad \text{Log D} = 1{,}154$$

APPENDICE B

On sait que les états excités individuels ou quasi-particules ne sont pas rigoureusement des états propres d'un système de fermions, même dans la limite des faibles énergies d'excitation. Ils subissent par conséquent des transitions vers d'autres états excités plus complexes faisant intervenir des "constellations" de quasi-particules et finalement se dissolvent dans l'état de base. Le but de cet Appendice est de calculer la durée de vie d'une telle quasi-particule dans le cas de l'Hélium 3 liquide à très basse température. On se rend compte en considérant l'espace de phase disponible pour l'état final, que le processus de collision inélastique le plus probable dans la limite des basses énergies est la création d'une paire particule-trou suivant le diagramme 10. Si on néglige la contribution des collisions plus complexes, la probabilité de disparition d'une particule $\vec{p}_1\,\sigma_1$ est égale à la probabilité intégrée d'une collision avec une autre particule $\vec{p}_2\,\sigma_2$, l'état final étant deux particules $\vec{p}_1'\,\sigma_1$ et $\vec{p}_2'\,\sigma_2$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{1}{(2\pi\hbar)^6}\sum_{\sigma_2}\int W_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}_1\,\vec{p}_2\,\vec{p}_1'\,\vec{p}_2')\, f_2\,(1-f_1')(1-f_2')\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_1'-\varepsilon_2')$$
$$\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_1'-\vec{p}_2')\; d^3p_2\; d^3p_1'\; d^3p_2' \qquad (B.1)$$

où W est la probabilité de collision, f_i est la distribution de Fermi $f(\varepsilon_i)$ et les deux fonctions delta expriment la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Il faut noter que lorsque σ_2 est parallèle à σ_1 l'état final est invariant par l'échange de $\vec{p}_1'$ et de $\vec{p}_2'$, et par suite, l'intégration sur $\vec{p}_2'$ doit réellement être restreinte à la moitié de l'espace réciproque. Si σ_1 et σ_2 sont antiparallèle au contraire, l'intégration doit être étendue à tout l'espace réciproque. Pour tourner cette difficulté, il suffit de sommer immédiatement sur le spin σ_2 de la seconde particule intervenant dans le processus de collision inélastique, en posant :

$$2\,w = W_{\uparrow\downarrow} + \frac{1}{2}\,W_{\uparrow\uparrow} \qquad (B.2)$$

Et on intégrera $\vec{p}_2'$ sur tout l'espace réciproque. On a introduit un facteur 2 au premier membre afin d'identifier notre définition de w à celle d'Abrikosov et Khalatnikov[12]. Comme les modules de toutes les quantités de mouvement sont sensiblement égaux à p_o, cette fonction w ne dépend en fait que des variables angulaires c'est-à-dire, dans le cas d'un système isotrope, les angles χ des vecteurs $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ et φ des plans $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ et $\vec{p}_1',\vec{p}_2'$ (compte tenu de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, l'angle des vecteurs $\vec{p}_1'$ et $\vec{p}_2'$ est également χ). Introduisant l'amplitude de diffusion A , nous pouvons écrire :

$$W_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_1',\vec{p}_2') = \frac{2\pi}{\hbar}\left|A_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_1',\vec{p}_2')\right|^2 \qquad (B.3)$$

Le calcul complet de cette amplitude de diffusion à partir du potentiel d'interaction entre les particules nues présente malheureusement des difficultés insurmontables et nous devrons nous contenter d'informations toutafait fragmentaires. L'analyse de Landau[24] montre que dans le cas particulier de la diffusion vers l'avant ($\varphi = 0$), on peut relier l'amplitude A à la fonction $f_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ qui caractérise l'énergie d'interaction desquasi-particules :

$$A_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}_1,\vec{p}_2) = f_{\sigma_1\sigma_2}(p_1,p_2) - \frac{m^* p_o}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{\sigma_3}\int f_{\sigma_1\sigma_3}(\vec{p}_1,\vec{p}_3)\, A_{\sigma_3\sigma_2}(\vec{p}_3,\vec{p}_2)\, d\Omega_3 \qquad (B.4)$$

où l'intégration porte sur toutes les directions de $\vec{p}_3$ (sur la sphère de Fermi). Pour la commodité du calcul, on défini les quantités sans dimension :

$$\alpha = \frac{m^* p_o}{\pi^2\hbar^3}\, A \qquad \varphi = \frac{m^* p_o}{\pi^2\hbar^3}\, f \qquad (B.5)$$

Obtenant ainsi :

$$\alpha(\vec{p}_1\sigma_1,\vec{p}_2\sigma_2) = \varphi(\vec{p}_1\sigma_1,\vec{p}_2\sigma_2) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{\sigma_3}\int\varphi(\vec{p}_1\sigma_1,\vec{p}_3\sigma_3)\,\alpha(\vec{p}_3\sigma_3,\vec{p}_2\sigma_2)\,\frac{d\Omega_3}{4\pi} \qquad (B.6)$$

On peut ensuite décomposer α et φ en une partie antisymétrique et une partie symétrique qui ne dépendent plus que de l'angle χ des deux vecteurs qui apparaissent dans l'argument :

$$\alpha(\vec{p}_1\sigma_1,\vec{p}_2\sigma_2) = \alpha^s(\chi) + 4\,\sigma_1\cdot\sigma_2\,\alpha^a(\chi)$$
$$\varphi(\vec{p}_1\sigma_1,\vec{p}_2\sigma_2) = \varphi^s(\chi) + 4\,\sigma_1\cdot\sigma_2\,\varphi^a(\chi) \qquad (B.7)$$

vers l'avant au dela de l'approximation d'ordre zéro, on peut aussi bien négliger aussi la variation de cette amplitude en fonction de l'angle φ . Nous sommes donc finalement conduit à faire l'approximation $w(\chi, \varphi) =$ constante. L'analyse ci-dessus nous permet en tout cas d'évaluer cette constante à partir des propriétés thermodynamiques du fluide (chaleur spécifique, vitesse du son, susceptibilité de spin). En rassemblant les expressions (B.2)(B.3)(B.5) et (B,11), on obtient :

$$w \simeq 12 \frac{\pi^5 \hbar^5}{m^{*2} p_o^2} \qquad \text{(B.12)}$$

On porte cette expression dans (B.1) et on intègre sur les variables angulaires selon la méthode exposée par Abrikosov et Khalatnikov (en changeant légèrement les notations de façon à faire apparaitre la symétrie de l'intégration sur les énergies : $\varepsilon_2 \to -\varepsilon_1$, $\varepsilon_1' \to \varepsilon_2$, $\varepsilon_2' \to \varepsilon_3$). On obtient alors :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{m^{*3}}{8\pi^4\hbar^6} \left[\frac{w}{\cos\frac{\chi}{2}}\right]_{Moy} \int (1-f_1)(1-f_2)(1-f_3)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 \qquad \text{(B.13)}$$

Le facteur entre crochet est une valeur moyenne sur toute la sphère; dans le cas où w est constant, cette valeur moyenne est donc simplement $2w$. On peut d'autre part calculer explicitement l'intégrale triple sur les énergies par une méthode exposée en détail dans (II). On obtient enfin :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{2}{\hbar\Lambda} \cdot \frac{(\pi/\beta)^2 + \varepsilon^2}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} \qquad \text{(B.14)}$$

où Λ est un paramètre ayant la dimension d'une énergie, défini par :

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{m^{*3}}{32\pi^4\hbar^5} \left[\frac{w}{\cos\frac{\chi}{2}}\right]_{Moy} = 12 \frac{\pi m^*}{16 p_o^2} \qquad \text{(B.15)}$$

En utilisant la valeur expérimentale $m^* = 2{,}8\ m$ déduite de mesures récentes de la chaleur spécifique de l'Hélium 3 à très basses températures[25], on calcule avec l'aide de cette expression une valeur $\Lambda = 1{,}5\ ^oK$.

On peut d'ailleurs évaluer ce paramètre par une méthode indépendante en partant des valeurs expérimentales des propriétés de transport du fluide : on sait en effet, que ces propriétés sont intimement liées à l'intégrale de collision et leur expression fait intervenir directement la probabilité de collision $w(\chi,\varphi)$ sous la forme de certaines moyennes angulaires. Par exemple, l'expression de la conductivité thermique, donnée dans la référence 12, est :

$$K = \frac{8\pi^2\hbar^3 p_o^2}{3 m^{*4} T} \left\{ \left[\frac{w(1-\cos\chi)}{\cos\frac{\chi}{2}} \right]_{Moy} \right\}^{-1} \qquad (B.16)$$

Si la moyenne angulaire qui apparait dans cette expression était exactement la même que celle de l'expression (B.15), on pourrait déduire Λ de K sans connaitre la forme de la fonction $w(\chi,\varphi)$. Il n'en est pas ainsi mais ces moyennes sont tout de même suffisamment proches pour qu'on puisse se permettre de négliger les variations de $w(\chi,\varphi)$. Il est très satisfaisant d'obtenir par cette méthode, en utilisant la valeur de la conductivité thermique mesurée par Wheatley[28], une valeur de Λ de l'ordre de 1,6 °K très voisine de celle que nous avons estimée directement sur la base de la théorie de Landau. Cet accord numérique nous donne donc une confiance assez ferme dans la valeur estimée du paramètre Λ qui mesure l'ampleur de l'effet des collisions, en particulier en ce qui concerne la durée de vie des excitations individuelles du système.

Il ne reste donc plus qu'à relier (B.14) au formalisme des fonctions de Green. Pour cela, on interprétera $n_k(t)$ comme la probabilité de retrouver à l'instant t la quasi-particule $\vec{k}$ introduite à l'instant 0 , soit :

$$n_k(t) = \langle \varphi_o | c_k(0)\, c_k^+(t)\, c_k(t)\, c_k^+(0) | \varphi_o \rangle = |G(\vec{k},t)|^2 \approx e^{-2\hbar^{-1}\Gamma_k t}$$

Et par conséquent :

$$\frac{dn_k}{dt} = -\frac{2\Gamma_k}{\hbar} \qquad (B.17)$$

Finalement, comparant (B.14) et (B.17), nous obtenons :

$$\Gamma^{\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{(\pi/\beta)^2 + \varepsilon^2}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} \qquad (B.18)$$

REFERENCES

(1) L. Cooper , Phys. Rev. 104 , 1189 (1956).

(2) J. Bardeen, L. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 , 1175 (1957) auquel nous nous référerons par l'abréviation BCS.

(3) N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev et D. V. Shirkov , A New Method in the Theory of Superconductivity , Académie des Sciences de l'U.R.S.S. (1958). (Traduction : Consultant Bureau Inc. New York, 1959).

(4) P. W. Anderson, Phys. Rev. 112 , 1900 (1958).

(5) K. A. Brueckner and J. L. Gammel, Phys. Rev. 109 , 1040 (1958).

(6) L. P. Pitaevskii, J. Exptl. Theoret. Phys. (URSS) 37 , 1794 (1959). (Traduction : Soviet Physics JETP 10 , 1267 (1960)).

(7) V. J. Emery and A. M. Sessler, Phys. Rev. 119 , 43 (1960).

(8) K. A. Brueckner, T. Soda, P. W. Anderson and P. Morel, Phys. Rev. 118 , 1442 (1960).

(9) A. C. Anderson, G. L. Salinger, W. A. Steyert and J. C. Wheatley, Phys. Rev. Letters, 6 , 331 (1961).

(10) L. P. Gor'kov, J. Exptl. Theoret. Phys. (URRS) 34 , 735 (1958). (Traduction : Soviet Physics JETP, 7 , 505 (1958)).

(11) O. Betbeder-Matibet et P. Nozières, Compt. Rend. 252 , 3943 (1961)

(12) A. A. Abrikosov and I. M. Khalatnikov, Report on Progress in Physics (The Physical Society, London, 1959) 22 , 329

(13) P. W. Anderson and P. Morel, Phys. Rev. 123 , 1911 (1961) (I).
P. Morel and P. Nozières, soumis pour publication à la Physical Review (II).

(14) L. P. Gor'kov et V. M. Galitskii, J. Exptl. Theoret. Phys. (URRS) 40 , 1124 (1961). (Traduction : Soviet Physics JETP, 13 , 792 (1961)).

(15) J. R. Schrieffer, communication privée.

(16) G. Heller et H. A. Kramers, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 37 , 378 (1934).
M. J. Klein and R. S. Smith, Phys. Rev. 80 , 1111 (1951).
P. W. Anderson, ibid. 86 , 694 (1952).

(17) V. J. Emery, communication privée.

(18) P. Nozières, Le Problème à N Corps, Cours de Troisième Cycle à l'Université de Paris, Fascicule V (1961).

(19) P. C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. 115 , 1342 (1959).

(20) J. M. Luttinger and J. C. Ward, Phys. Rev. 118 , 1417 (1960)
J. M. Luttinger, Phys. Rev. 121 , 942 (1961).

(21) J. M. Blatt, S. T. Butler and M. R. Schafroth, Phys. Rev. 100 , 481 (1955).

(22) E. L. Andronikashvili, J. Phys. Moskow 10 , 201 (1946).
Voir également K. R. Atkins, Liquid Helium (Cambridge University Press, New York, 1959) pour des références complètes sur ce type d'expériences.

(23) Voir en particulier :
P. W. Anderson, Phys. Rev. 110 , 827 (1958).
L. P. Kadanoff and P. C. Martin, Phys. Rev. 124 , 670 (1961).

(24) L. D. Landau, J. Exptl. Theoret. Phys. (URRS) 35 , 97 (1958)
(Traduction : Soviet Physics JETP, 8 , 70 (1959)).

(25) A. C. Anderson, W. Reese, R. J. Sarwinski and J. C. Wheatley,
Phys. Rev. Letters, 7 , 220 (1961).

(26) A. C. Anderson, G. L. Salinger, W. A. Steyert and J. C. Wheatley,
Phys. Rev. Letters, 7 , 295 (1961)

(27) W. R. Abel, A. C. Anderson and J. C. Wheatley,
Phys. Rev. Letters, 7 , 299 (1961).

voir également :

H. L. Laquer, S. G. Sydoriak and T. R. Roberts, Phys. Rev. 113 , 417 (1959).

(28) A. C. Anderson, G. L. Salinger and J. C. Wheatley,
Phys. Rev. Letters, 6 , 443 (1961).

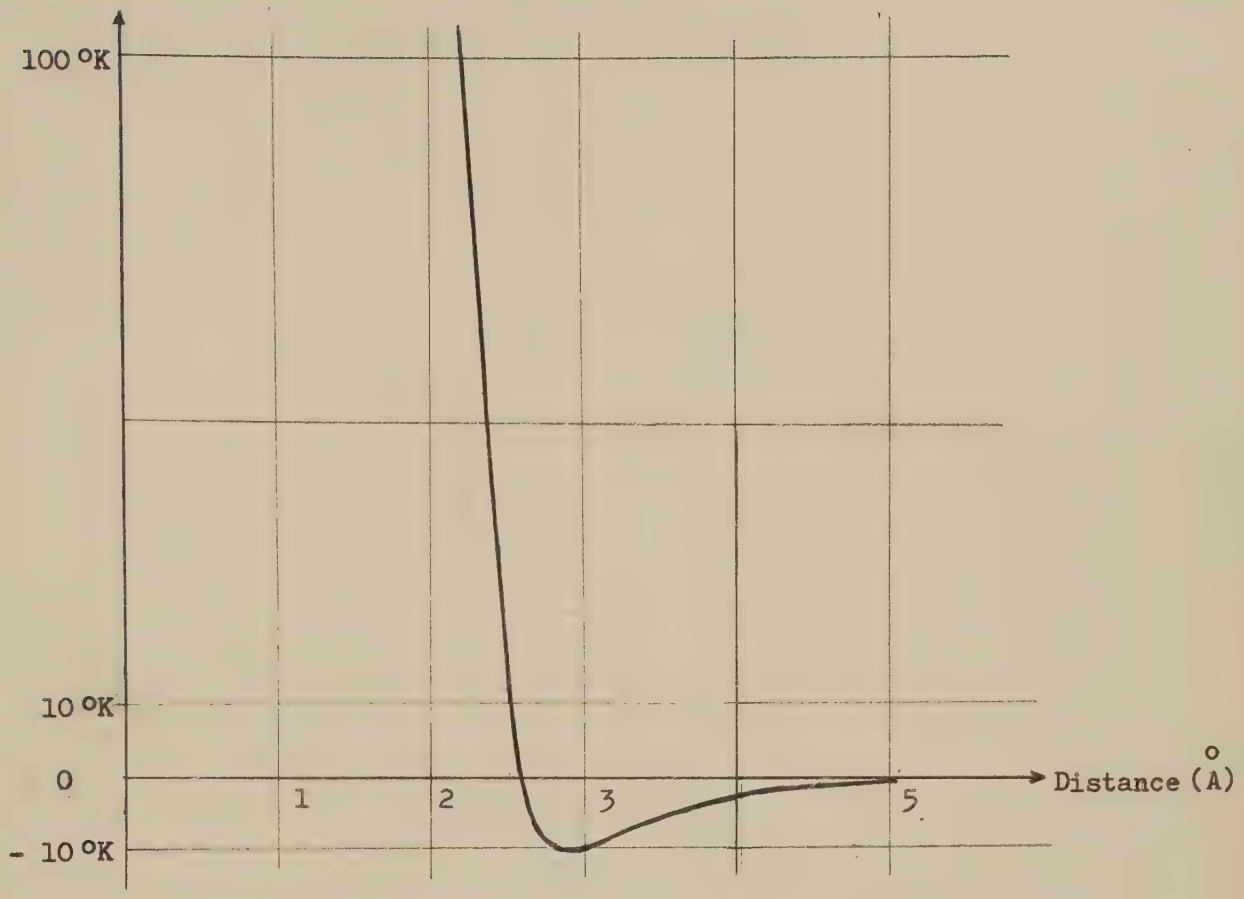

Figure 1 : potentiel d'interaction entre deux atomes d'Hélium 3 en fonction de la distance (Å).

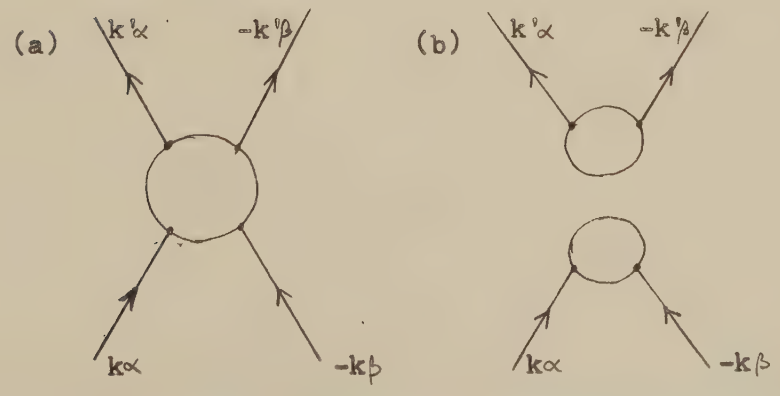

Figure 2 : diagramme du processus représentant la propagation de deux particules k_α et $-k_\beta$ dans le cas d'un système normal (a) et d'un système condensé (b)

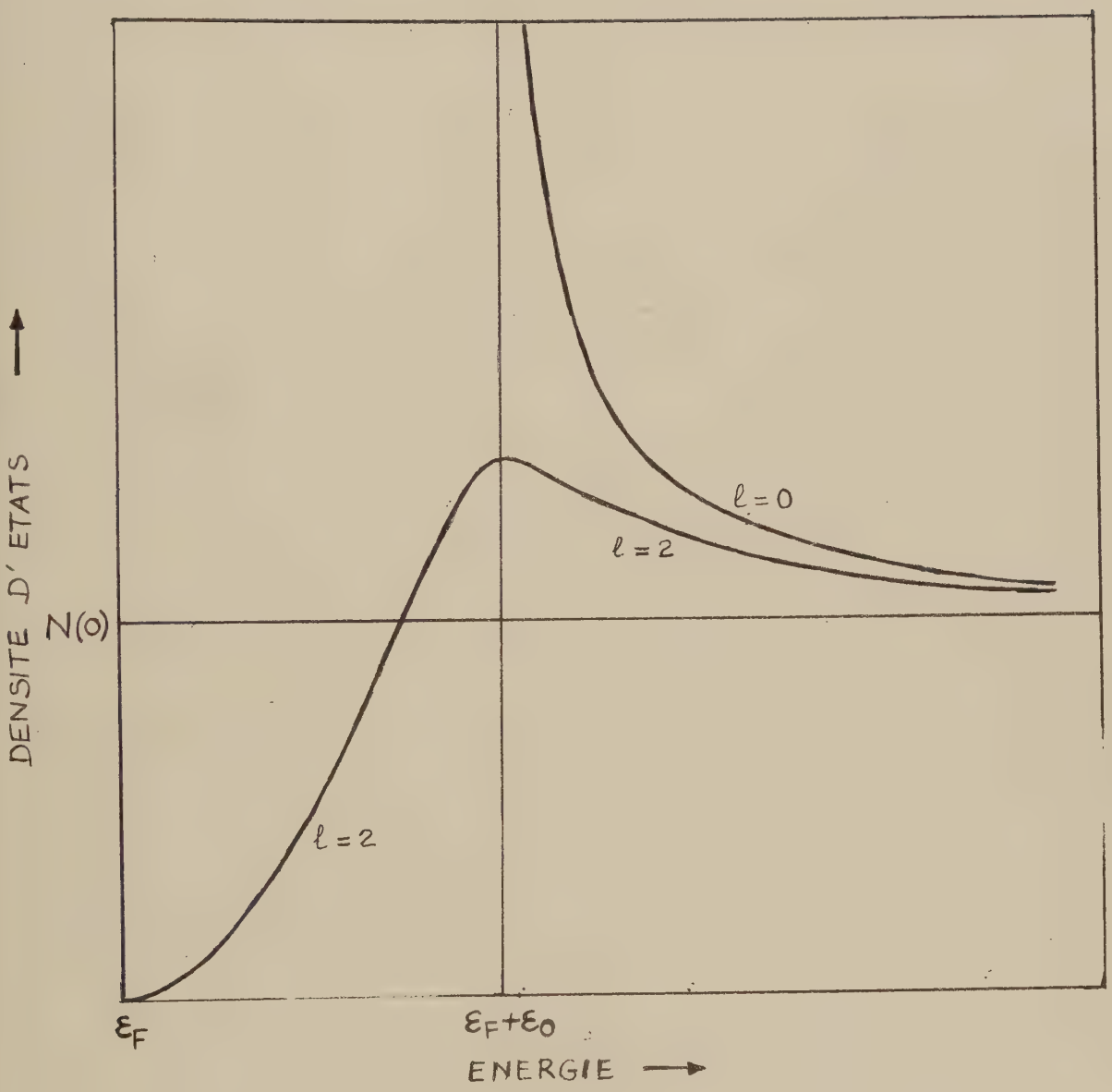

Figure 3 : Densité d'états individuels au voisinage du niveau de Fermi.
(la courbe $\ell = 2$ correspond à la solution C_5 tandis que la courbe $\ell = 0$, donnée à titre de comparaison correspond au cas d'un spectre d'excitation isotrope).

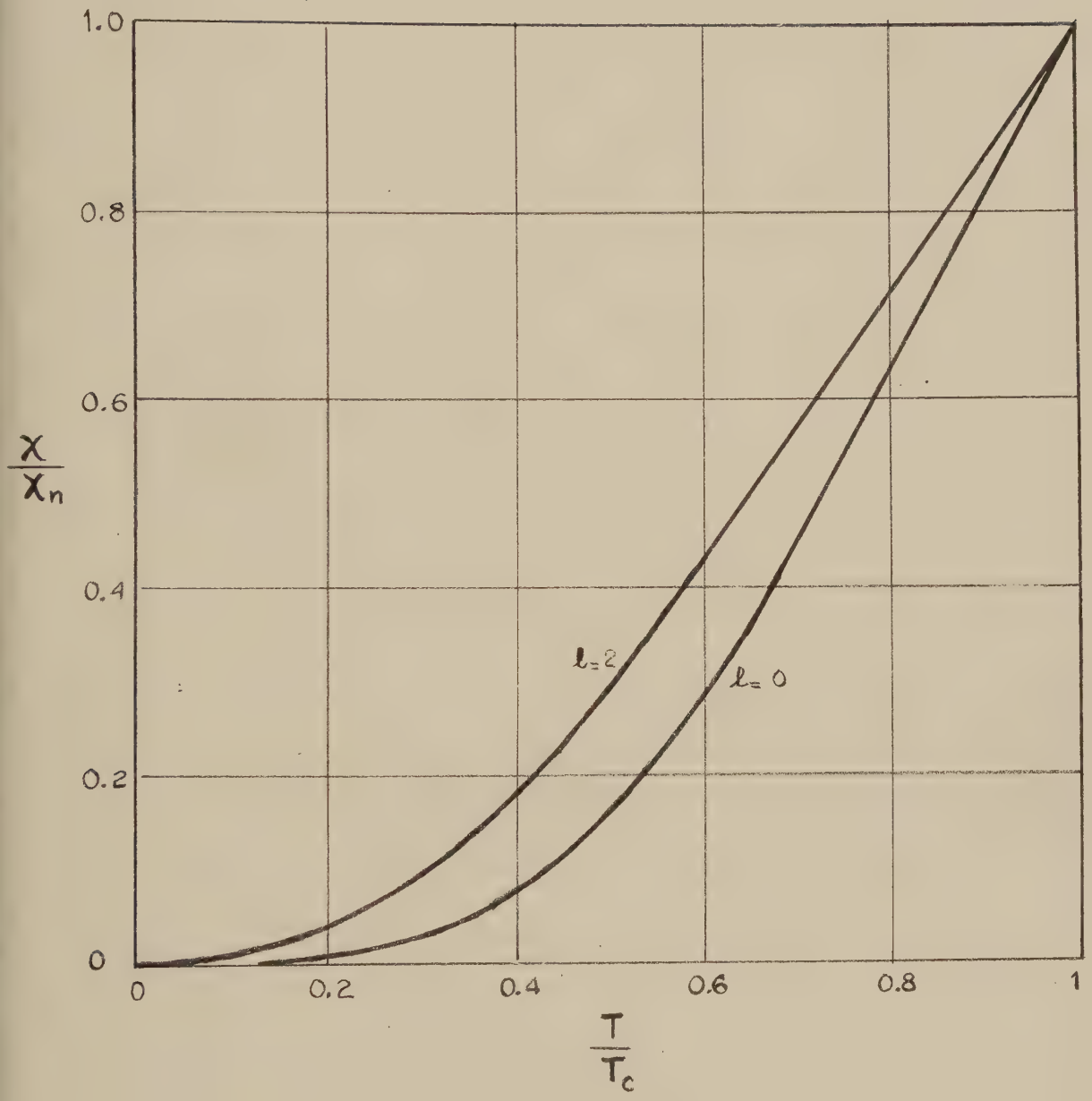

Figure 4 : variation du rapport de la susceptibilité paramagnétique dans l'état condensé à la susceptibilité dans l'état normal, en fonction de la température réduite.
La courbe $\ell = 2$ correspond à la solution C_5 tandis que la courbe $\ell = 0$ indique par comparaison la variation de ce rapport dans le cas d'un spectre d'excitation isotrope.

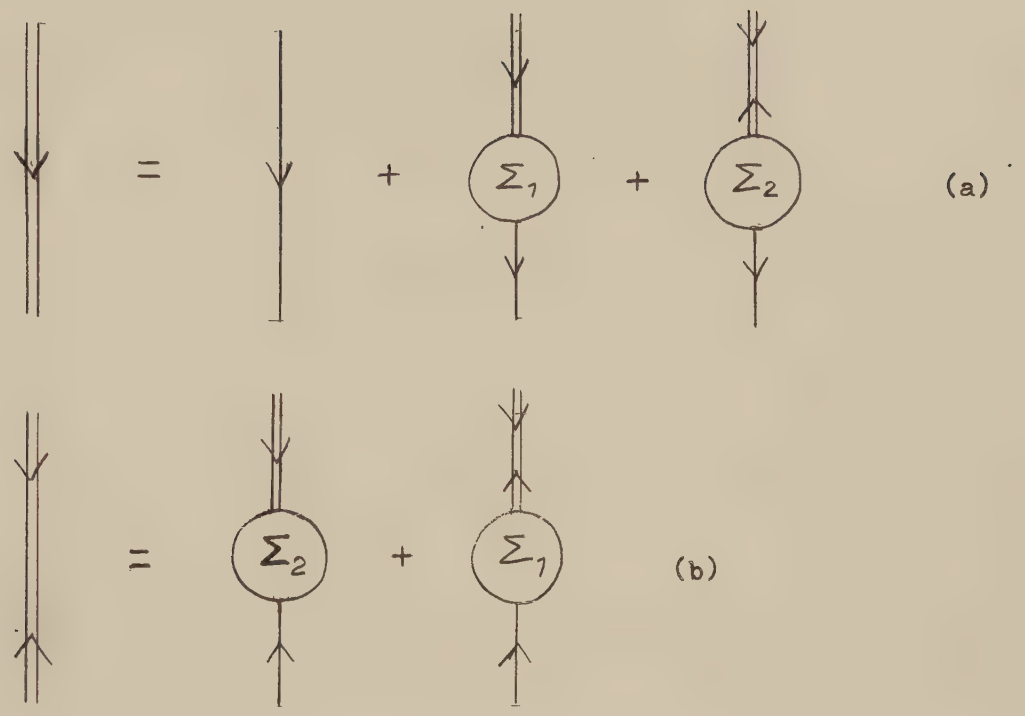

Figure 5 : Analyse diagrammatique des processus qui donnent lieu d'une part à la propagation d'une quasi-particule(a) d'autre part, à son absorption cohérente dans la phase condensée (b).
Une ligne simple représente le propagateur G_0. Les lignes doubles représentent les propagateurs G (une flèche) et $\hat{F}$ (deux flèches) renormalisés.

Figure 6 : Analyse, au premier ordre de l'interaction d'un noyau irréductible Σ_1 et d'un noyau irréductible $\check{\Sigma}_2$,
La ligne interrompue représente l'interaction.

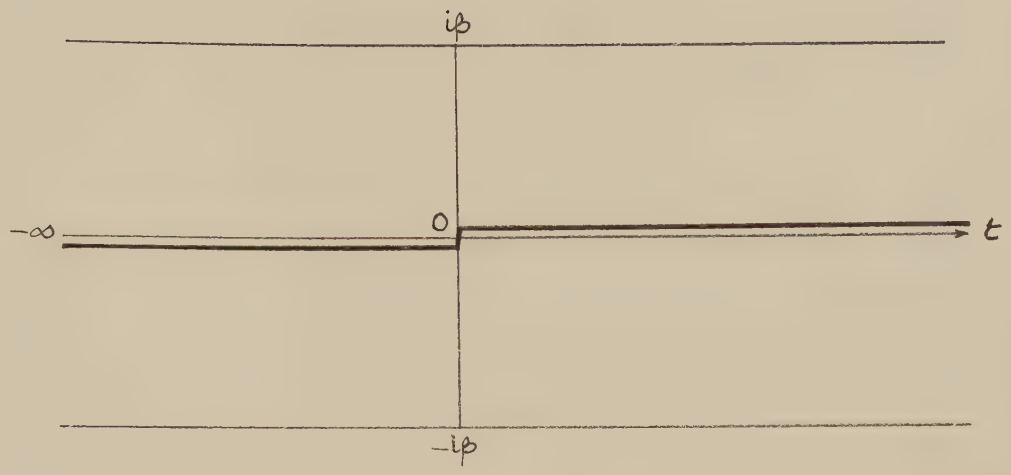

Figure 7 : Domaine d'analyticité des fonctions de Green dépendant de la température, dans le plan des temps complexes t.

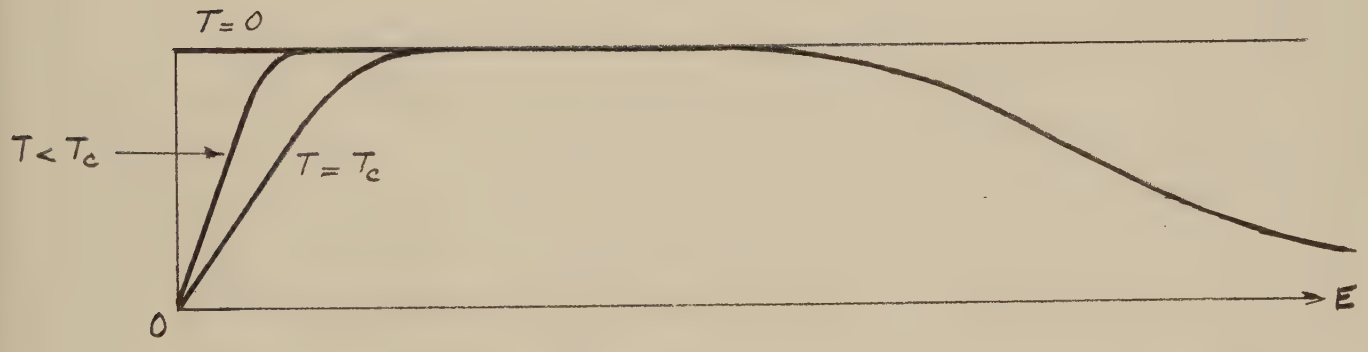

Figure 8 : courbe représentative de la fonction de coupure $g^{\beta}(E)$ en fonction de l'énergie, pour différentes températures croissant de zéro à la température critique T_c.

Figure 9 : diagrammes donnant lieu à un effet de correlation

(a) échange

(b) condensation

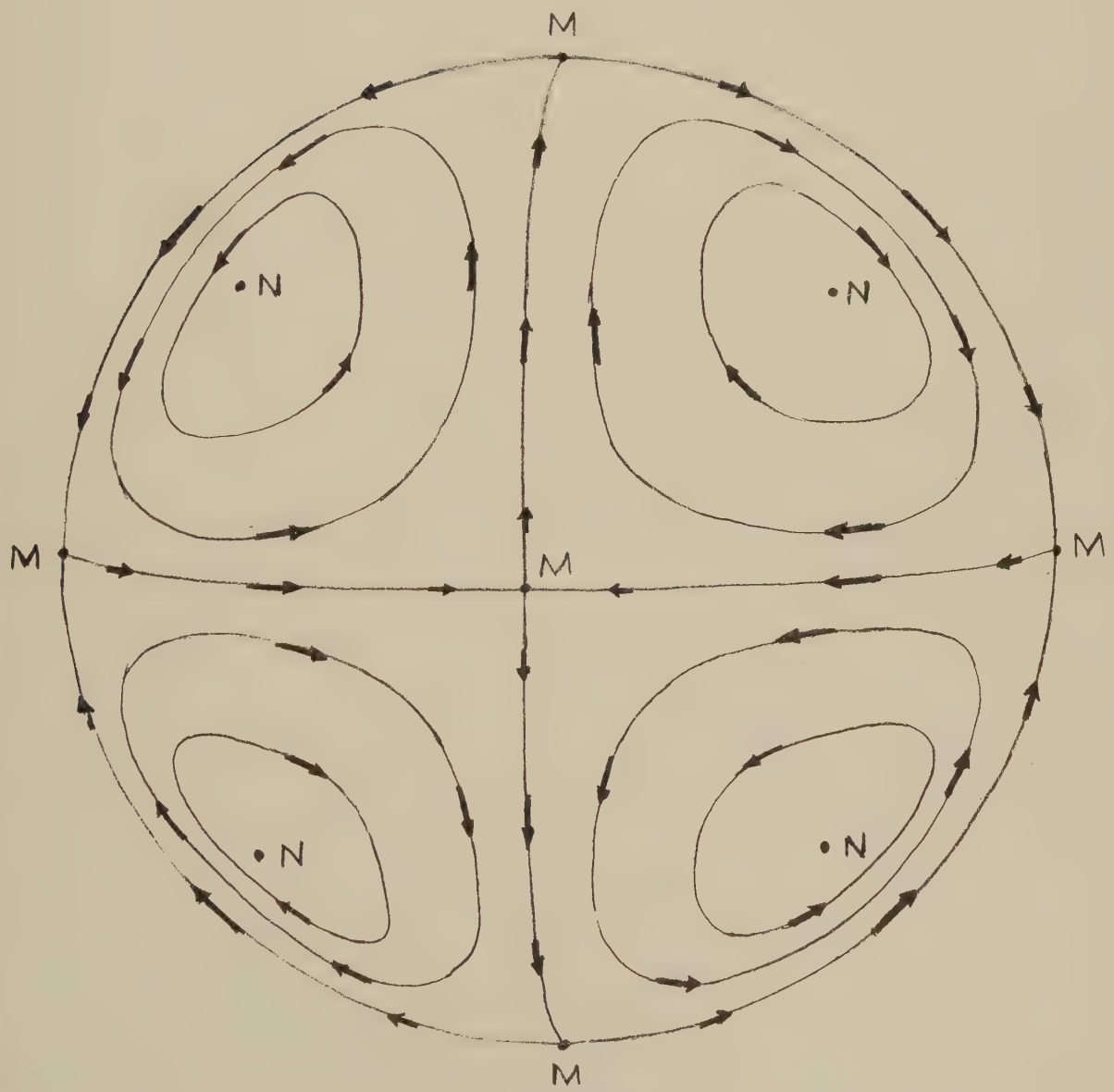

Figure 10 : courant correspondant à la correlation (8.b)
Les points M correspondent au maxima de la fonction $C(\hat{k})$,
les points N à ses noeuds.

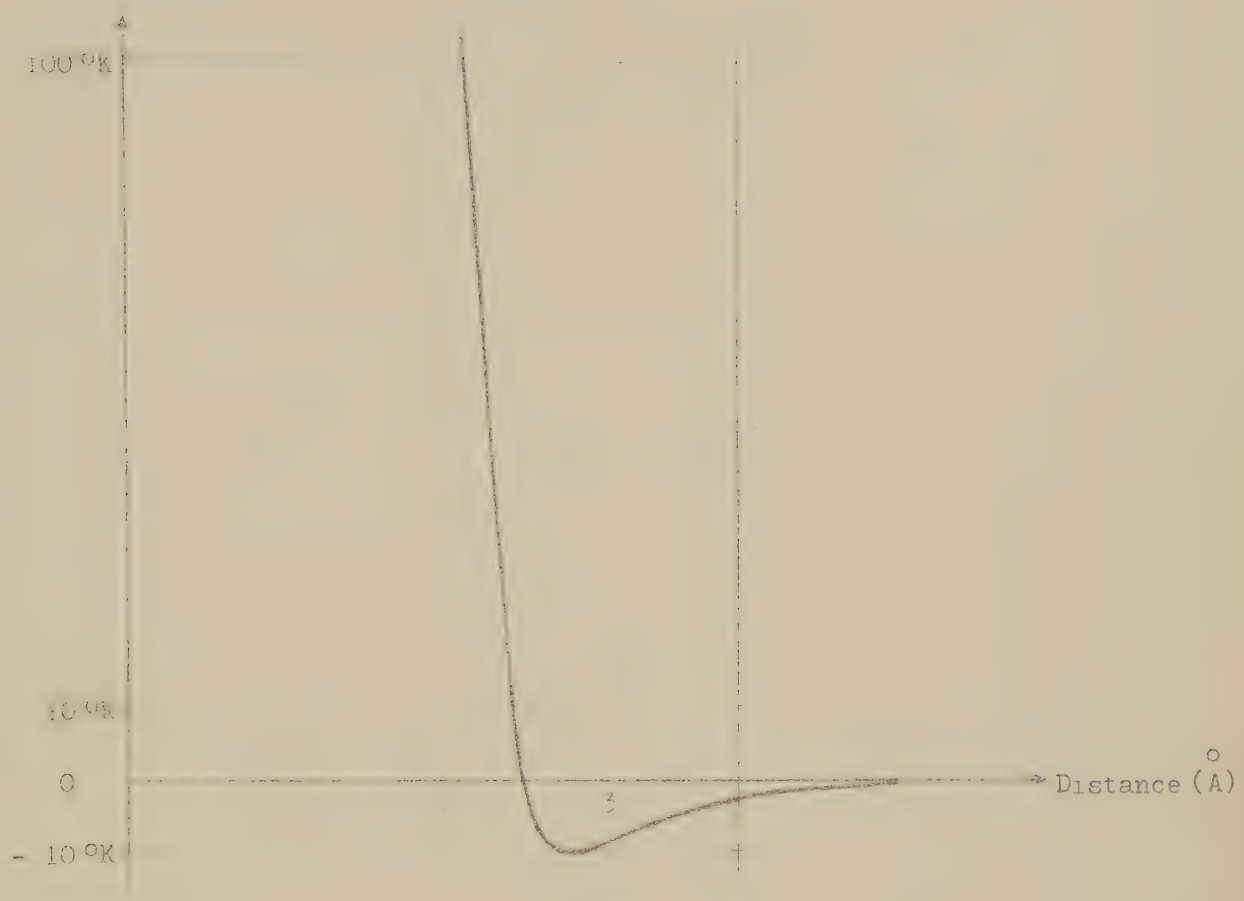

Figure 1 : potentiel d'interaction entre deux atomes d'Hélium 3 en fonction de la distance (Å).

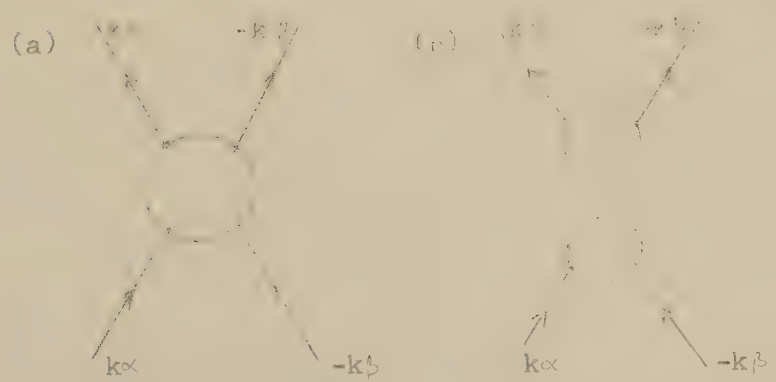

Figure 2 : diagramme du processus représentant la propagation de deux particules k_α et $-k_\beta$ dans le cas d'un système normal (a) et d'un système condensé (b)

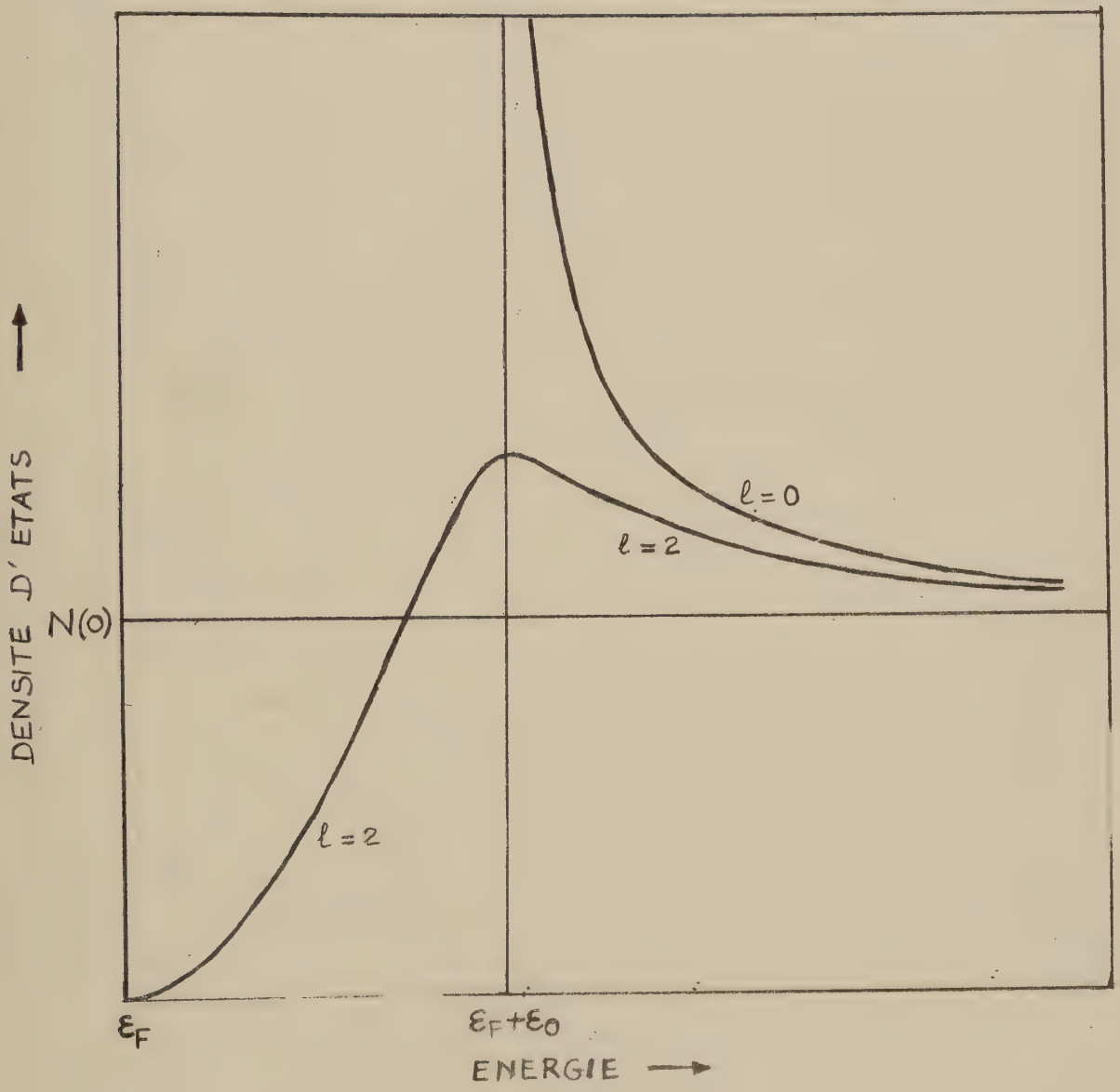

Figure 3 : Densité d'états individuels au voisinage du niveau de Fermi.
(la courbe $\ell = 2$ correspond à la solution C_5 tandis que la courbe $\ell = 0$, donnée à titre de comparaison correspond au cas d'un spectre d'excitation isotrope).

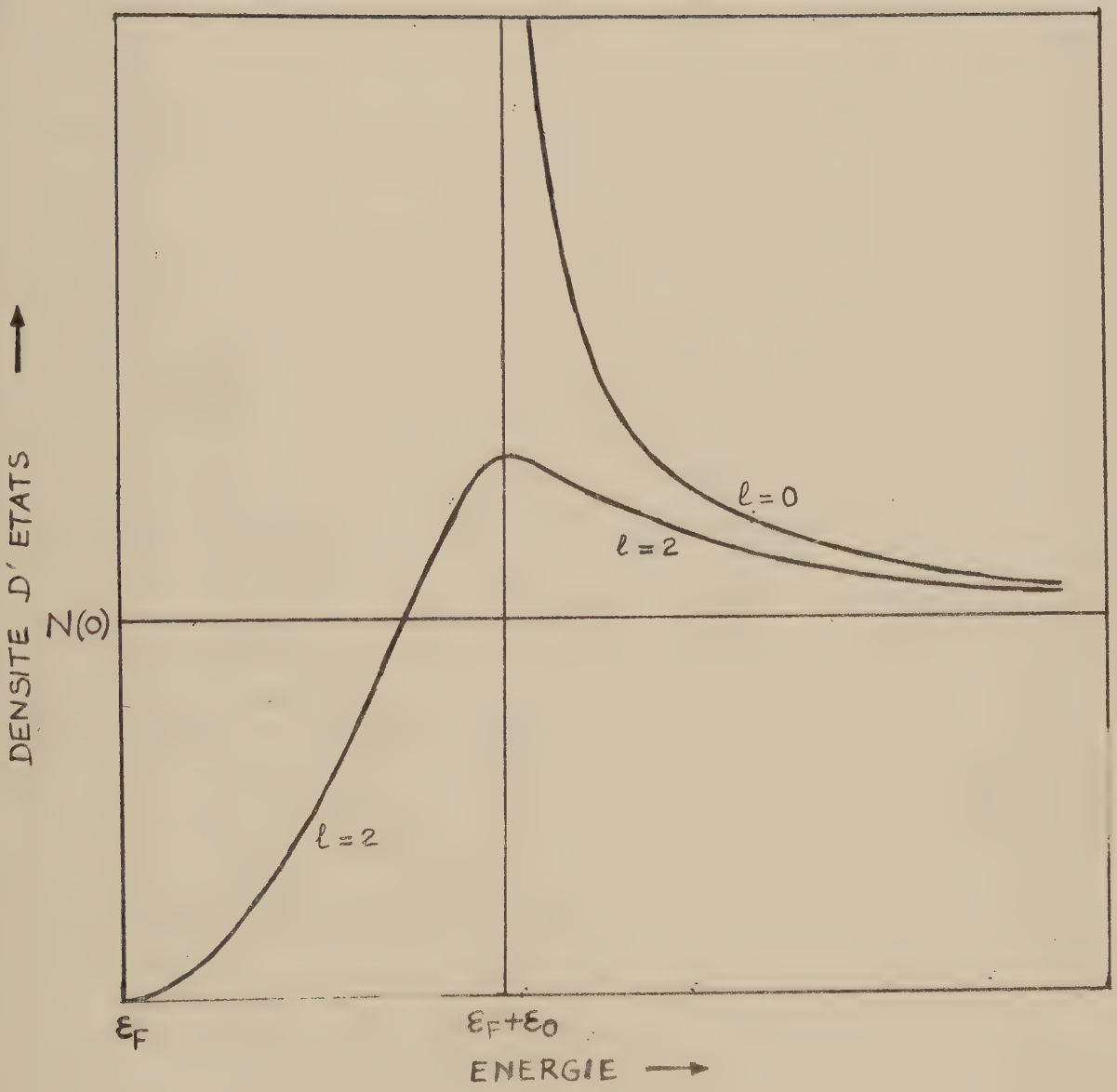

Figure 3 : Densité d'états individuels au voisinage du niveau de Fermi.
(la courbe $\ell = 2$ correspond à la solution C_5 tandis que la courbe $\ell = 0$, donnée à titre de comparaison correspond au cas d'un spectre d'excitation isotrope).

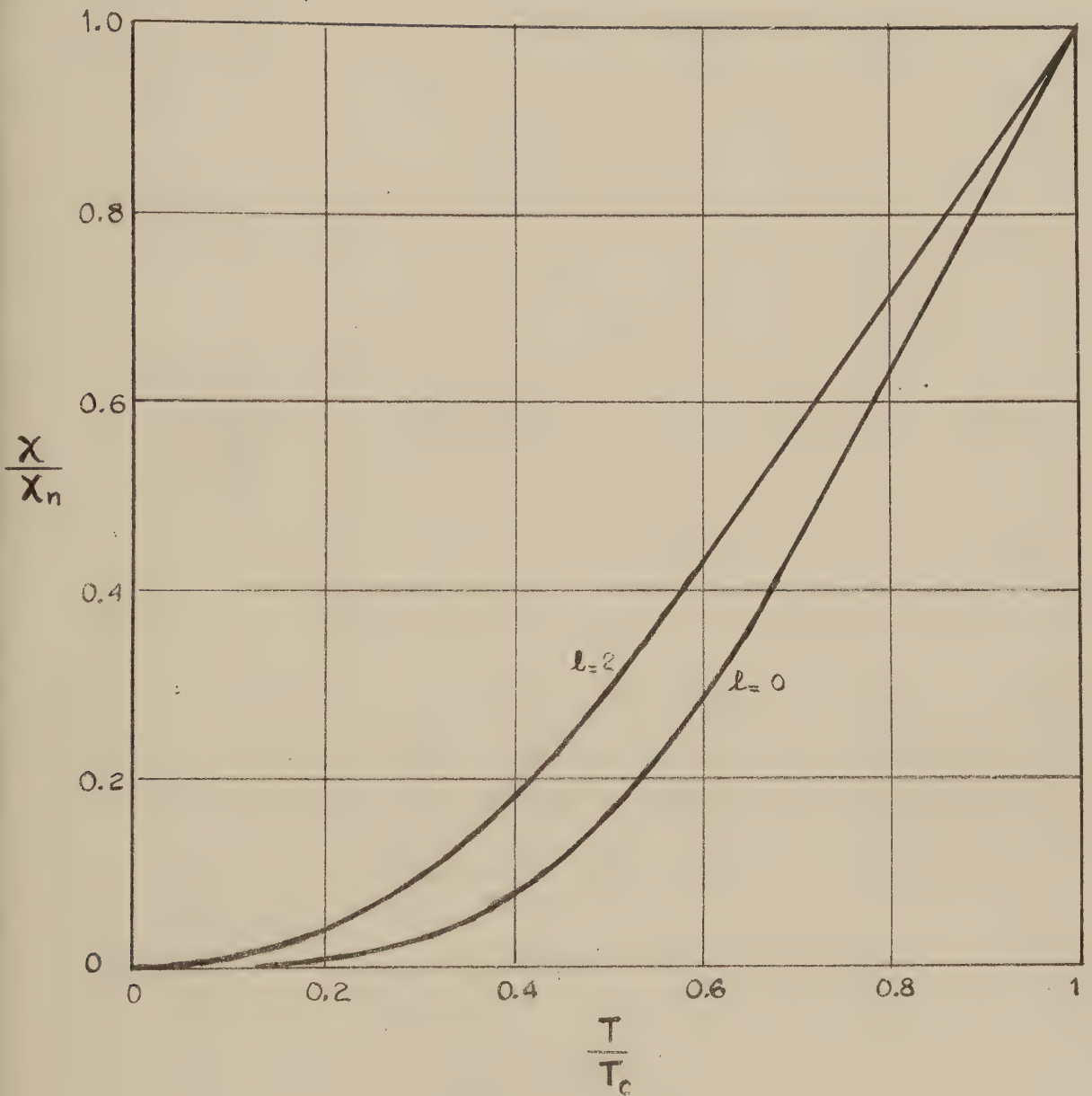

Figure 4 : variation du rapport de la susceptibilité paramagnétique dans l'état condensé à la susceptibilité dans l'état normal, en fonction de la température réduite.
La courbe $\ell = 2$ correspond à la solution C_5 tandis que la courbe $\ell = 0$ indique par comparaison la variation de ce rapport dans le cas d'un spectre d'excitation isotrope.

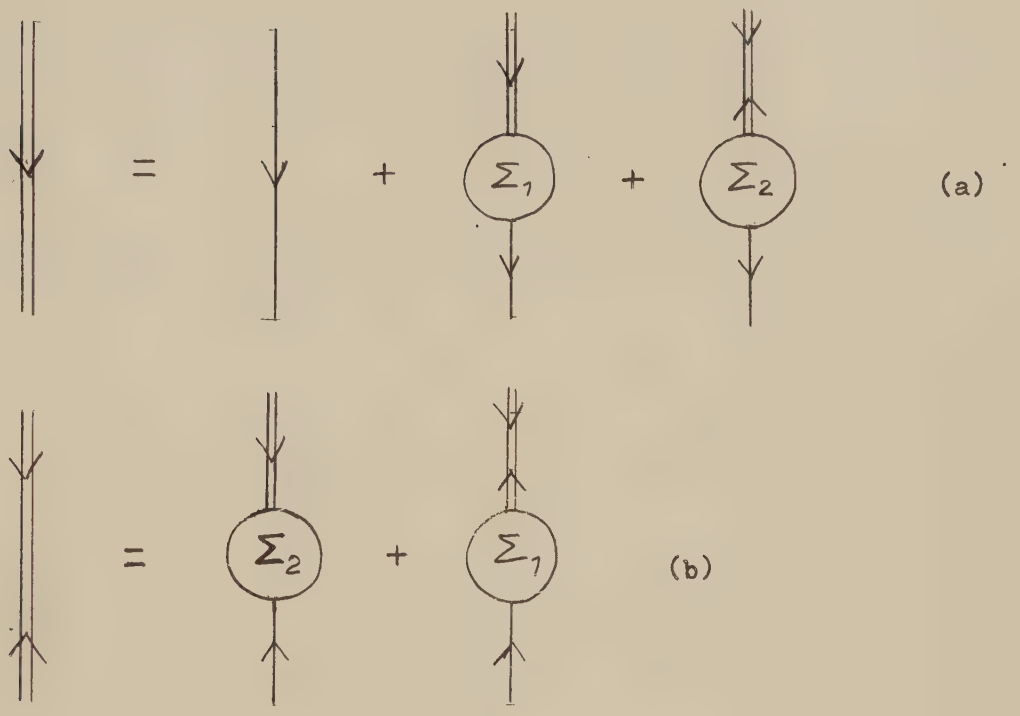

Figure 5 : Analyse diagrammatique des processus qui donnent lieu d'une part à la propagation d'une quasi-particule(a) d'autre part, à son absorption cohérente dans la phase condensée (b).
Une ligne simple représente le propagateur G_o. Les lignes doubles représentent les propagateurs G (une flêche) et $\hat{F}$ (deux flêches) renormalisés.

Figure 6 : Analyse, au premier ordre de l'interaction d'un noyau irréductible Σ_1 et d'un noyau irréductible $\check{\Sigma}_2$,
La ligne interrompue représente l'interaction.

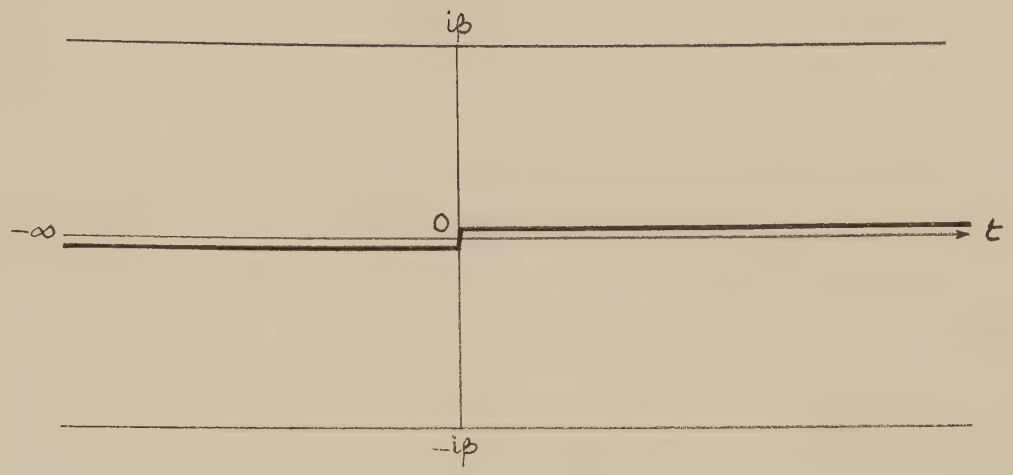

Figure 7 : Domaine d'analyticité des fonctions de Green dépendant de la température, dans le plan des temps complexes t.

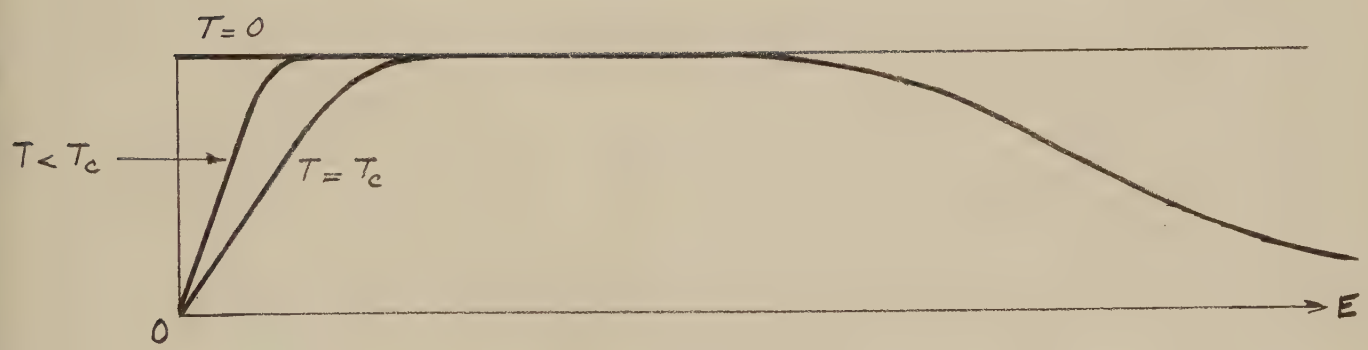

Figure 8 : courbe représentative de la fonction de coupure $g^{\beta}(E)$ en fonction de l'énergie, pour différentes températures croissant de zéro à la température critique T_c.

Figure 9 : diagrammes donnant lieu à un effet de correlation

(a) échange (b) condensation

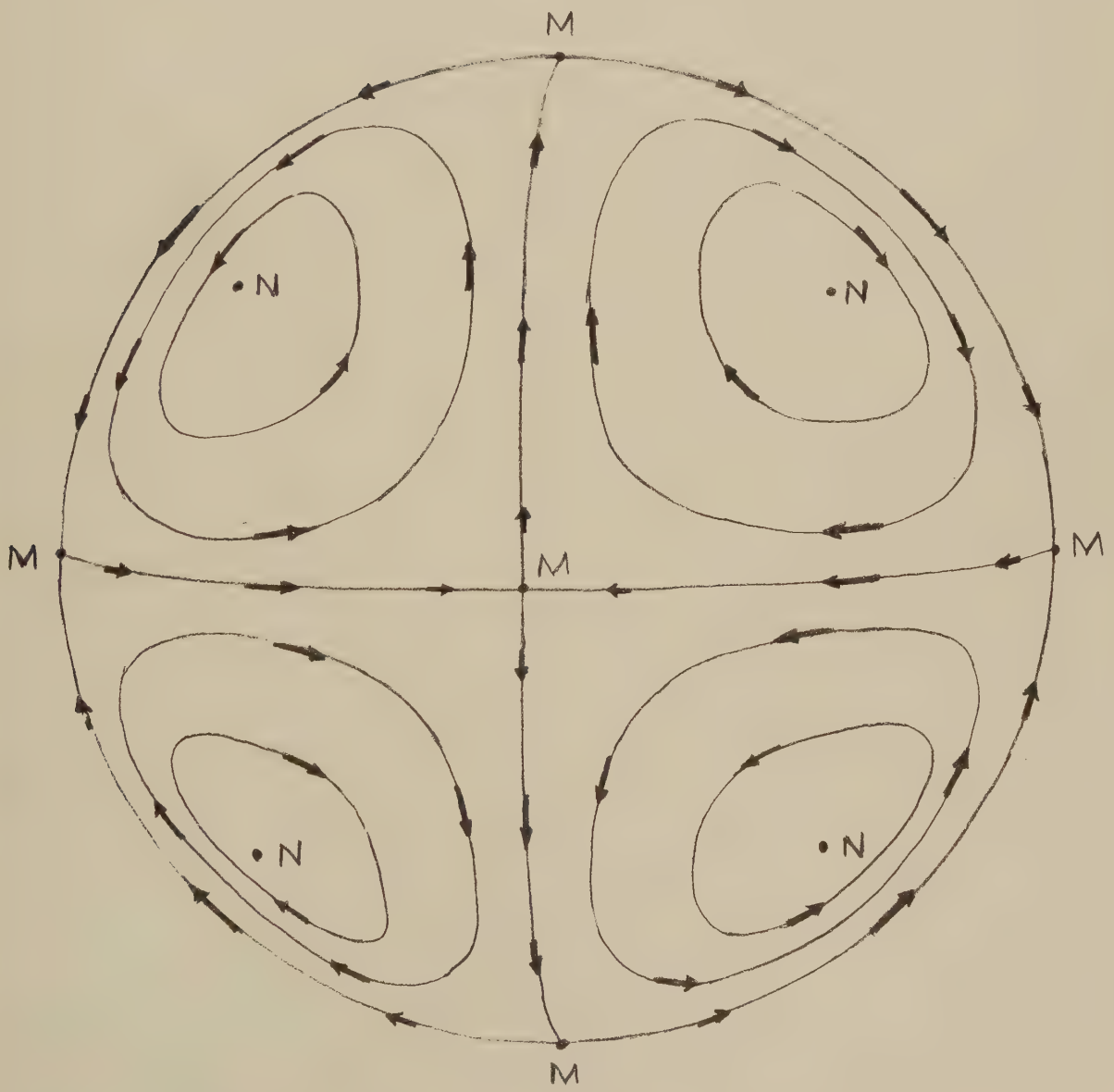

Figure 10 : courant correspondant à la correlation (8.b)
Les points M correspondent au maxima de la fonction $C(\hat{k})$,
les points N à ses noeuds.

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

" Mesure de la profondeur de la discontinuité de Mohorovicik par la méthode sismique ".

Vu et approuvé :

Paris le 17 Octobre 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences

MARC ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
le Recteur de l'Académie
de Paris

JEAN ROCHE